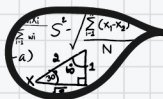


95 แนวข้อสอบ ☆

O-NET



คณิต
ม.3

ที่ออกบ่อยที่สุด

ครูพี่อาร์thur ผู้เขียน

เจ้าของสถาบัน

CHULA A-Plus Tutor

วิทยาศาสตร์บัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

มีประสบการณ์สอนมากกว่า 12 ปี

 kru.arthur: 285k followers

95 แนวข้อสอบ ★

O-NET

คณิต

ม.3

ที่ออกบ่อยที่สุด

ครูพี่อาเทอร์ ผู้เขียน

เจ้าของสถาบัน CHULA A-Plus Tutor



NANMEEBOOKS

95 แนวข้อสอบ O-NET คณิต ม.3 ที่ออกบ่อยที่สุด

ชีราวุธ บุญพั้ว เขียน

พิมพ์ครั้งที่ 1 มิถุนายน 2563

ราคา 165 บาท

© ชีราวุธ บุญพั้ว

© ลิขสิทธิ์ 2563: ชีราวุธ บุญพั้ว

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ (ฉบับเพิ่มเติม) พ.ศ. 2558

ข้อมูลทางบรรณานุกรม

ชีราวุธ บุญพั้ว.

95 แนวข้อสอบ O-NET คณิต ม.3 ที่ออกบ่อยที่สุด. -- กรุงเทพฯ: นานมีบุ๊คส์, 2563.
208 หน้า.

1. คณิตศาสตร์. I. ชื่อเรื่อง.

510

390001-002040-1

ประธานเจ้าหน้าที่บริหาร คิม จงสถิตยวัฒนา • ผู้จัดการสำนักพิมพ์ สุชาดา งามวัฒนจินดา • บรรณาธิการบริหาร สุภารัตน์ ภูไตรรัตน์ อัญมณี ทองเลิศ • บรรณาธิการเล่ม สุทธิกานต์ คงพันธ์ • หัวหน้าพิสูจน์อักษร ธนชัย ทุมรัตน์ • พิสูจน์อักษร เสรีชัย ตริเข็ม • ออกแบบปก พิมพ์พิศา คุรุธรรมณัฐ สุภาวดี แพวขุนทด • กราฟิก จิตติมา ศรีธนทิพย์ • หัวหน้าประสานงานการผลิต จรัสศรี พรหมเทพ • ประสานงานการผลิต พรทิพย์ ทองบุตร

เพลตและพิมพ์ที่ พิมพ์ดี โทร. 0-2401-9401

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย

 **NANMEEBOOKS**

บริษัท นานมีบุ๊คส์ จำกัด

เลขที่ 11 ซอยสุขุมวิท 31 (สวัสดี) ถนนสุขุมวิท แขวงคลองเตยเหนือ เขตวัฒนา กรุงเทพฯ 10110

โทร. 0-2670-9800, 0-2662-3000 โทรสาร 0-2662-0919

e-mail: editorial@nanmeebooks.com • www.nanmeebooks.com • www.facebook.com/nanmeebooksfan

กระดาษที่ใช้พิมพ์หนังสือเล่มนี้ผลิตมาจากไม้ในป่าปลูก โดยไม่ทำลายป่าไม้ธรรมชาติ

และใช้หมึกธรรมชาติจากน้ำมันถั่วเหลือง จึงปลอดภัยต่อมนุษย์และเป็นมิตรต่อสิ่งแวดล้อม

หากหนังสือเล่มนี้ผลิตไม่ได้มาตรฐาน สำนักพิมพ์ยินดีรับผิดชอบเปลี่ยนเล่มใหม่ให้ โดยไม่มีเงื่อนไขใดๆ ทั้งสิ้น

โปรดส่งไปเปลี่ยนตามที่อยู่บริษัท หรือติดต่อ Nanmeebooks Call Center โทร. 0-2662-3000 กด 1

◆ คำนำสำนักพิมพ์ ◆

การอ่านหนังสือเสริมความรู้คณิตศาสตร์จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาในห้องเรียนได้ดียิ่งขึ้น และมีความรู้เพิ่มเติมที่ต่อยอดไปสู่การทดสอบทางการศึกษาระดับชาติ

การทดสอบทางการศึกษาระดับชาตินี้หรือ O-NET (Ordinary National Educational Test) เป็นการทดสอบเพื่อวัดความรู้และความคิดของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ประเมินตามมาตรฐานการเรียนรู้ในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน ซึ่งหนังสือ **95 แนวข้อสอบ O-NET คณิต ม.3 ที่ออกบ่อยที่สุด** เป็นหนังสือที่เหมาะสมสำหรับการเรียนรู้ด้วยตนเองและทดสอบความรู้ก่อนที่จะได้ทำจริงในสนามสอบ อีกทั้งยังมีเนื้อหาที่สอดคล้องกับหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานอีกด้วย

เนื้อหาในเล่ม **“95 แนวข้อสอบ O-NET คณิต ม.3 ที่ออกบ่อยที่สุด”** ประกอบด้วยจำนวนและการดำเนินการ การวัดและเรขาคณิต สถิติและความน่าจะเป็น มีแบบฝึกหัดระหว่างเนื้อหาและแบบฝึกหัดท้ายบทเพื่อให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการคิด ซึ่งแบบฝึกหัดท้ายบทที่เราเว้นที่ว่างไว้เพื่อต้องการให้เขียนวิธีคิดและคำตอบลงไปได้เลย และมีเฉลยละเอียดท้ายเล่ม เชื่อว่าหากนักเรียนหมั่นศึกษาและทำแบบทดสอบอย่างเป็นประจำแล้ว จะรู้สึกสนุกในการเรียน มีใจรักในวิชาคณิตศาสตร์ และทำข้อสอบ O-NET ได้ฉลุยอย่างแน่นอน

นานมีบุ๊คส์

◆ คำนำนักเขียน ◆

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ศึกษาทฤษฎีตัวเลขต่าง ๆ อย่างมีเหตุผล เป็นขั้นเป็นตอน แต่ก็ปฏิเสธไม่ได้ว่าหลาย ๆ คนไม่ชอบเรียนวิชานี้เลย

หนังสือคณิตเล่มนี้เหมาะสมที่สุด ๆ สำหรับนักเรียนที่ต้องการทบทวนเนื้อหาแต่ละหัวข้อ มีทั้งการสรุปประเด็นออกสอบที่กระชับ เข้าใจง่าย มีแบบฝึกหัดตลอดเล่มและท้ายเล่ม และมีตัวอย่างที่ออกสอบให้นักเรียนได้ระวังในการทำข้อสอบ เหมือนมีพี่ ๆ ตัวเต๋อคอยอธิบาย ชี้แนะ เน้นย้ำให้เข้าใจง่าย จนทำข้อสอบได้ตามหวังไว้ เพื่อการสอบประจำบท สอบย่อย เก็บคะแนนในโรงเรียน สอบ O-NET ชิงทุน เพิ่มเกรด โควตาและสอบเข้า ม.4 ในโรงเรียนดังทั่วประเทศ

ผู้เขียนหวังอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะช่วยนักเรียนให้เข้าใจเนื้อหาและความคิดรวบยอดของคณิตศาสตร์ ม.ต้นได้อย่างครบถ้วน

ด้วยความปรารถนาดี
ชिरารุร บุญพั้ว (ครูพี่อาเทอร์)
สถาบันกวดวิชาจุฬา เอ-พลัส
FB: kru.arthur

◆ รู้จักผู้เขียน ◆



ครูพี่อาเทอร์

ชิราวุธ บุญพั้ว

เจ้าของโรงเรียนกวดวิชาครูพี่อาเทอร์ จังหวัดชลบุรี

เจ้าของ ➡ Facebook Fanpage kru.arthur กวดวิชาครูพี่อาเทอร์
(ผู้ติดตาม 300,000 คน)

การศึกษา ➡ วิทยาศาสตร์บัณฑิต ภาควิชาชีวเคมี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประสบการณ์ด้านการสอน ➡ เป็นติวเตอร์ตั้งแต่มหาวิทยาลัยชั้นปีที่ 1 เมื่อจบการศึกษาแล้วก็ประกอบอาชีพเป็นติวเตอร์เป็นเวลาถึง 12 ปี ทั้งยังได้รับเชิญเป็นวิทยากรโรงเรียนทั่วประเทศในหัวข้อบรรยายวิชา O-NET, GAT/PAT และ 9 วิชาสามัญ

♦ สารบัญ ♦



บันทึก 1



จำนวนและการดำเนินการ | 7

- จำนวนจริง → รากที่สองของจำนวนจริง → รากที่ n ของจำนวนจริง
- ค.ร.น. และ ห.ร.ม. → เศษส่วน → ทศนิยม → อัตราส่วนและร้อยละ
- เลขยกกำลัง → เอกนามและพหุนาม → สมการและอสมการ
- สมการกำลังสอง → ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1 | 49

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1 | 148



บันทึก 2



การวัดและเรขาคณิต | 54

- การสร้างทางเรขาคณิต → มิติสัมพันธ์ → สูตรหาพื้นที่รูปเรขาคณิตสองมิติ
- พีทาโกรัส → พื้นที่ผิวและปริมาตร → เส้นขนาน → รูปสามเหลี่ยม
- รูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ → รูปสามเหลี่ยมคล้าย
- การแปลงทางเรขาคณิต → อัตราส่วนตรีโกณมิติ → วงกลม

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2 | 100

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2 | 171



บันทึก 3



สถิติ | 106

- ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสถิติที่ควรทราบ → การเก็บรวบรวมข้อมูล
- การนำเสนอข้อมูล → ตารางแจกแจงความถี่
- การแจกแจงความถี่ด้วยกราฟหรือแผนภูมิ → ค่ากลางของข้อมูล
- โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่ากลางของข้อมูล → การวัดการกระจายของข้อมูล
- ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความถี่ ค่ากลาง และการกระจายข้อมูล

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3 | 126

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3 | 190

บันทึก 4

ความน่าจะเป็น | 129

- แผนภาพต้นไม้ → กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ → แฟกทอเรียล
- วิธีเรียงสับเปลี่ยน → วิธีจัดหมู่ → ความน่าจะเป็น

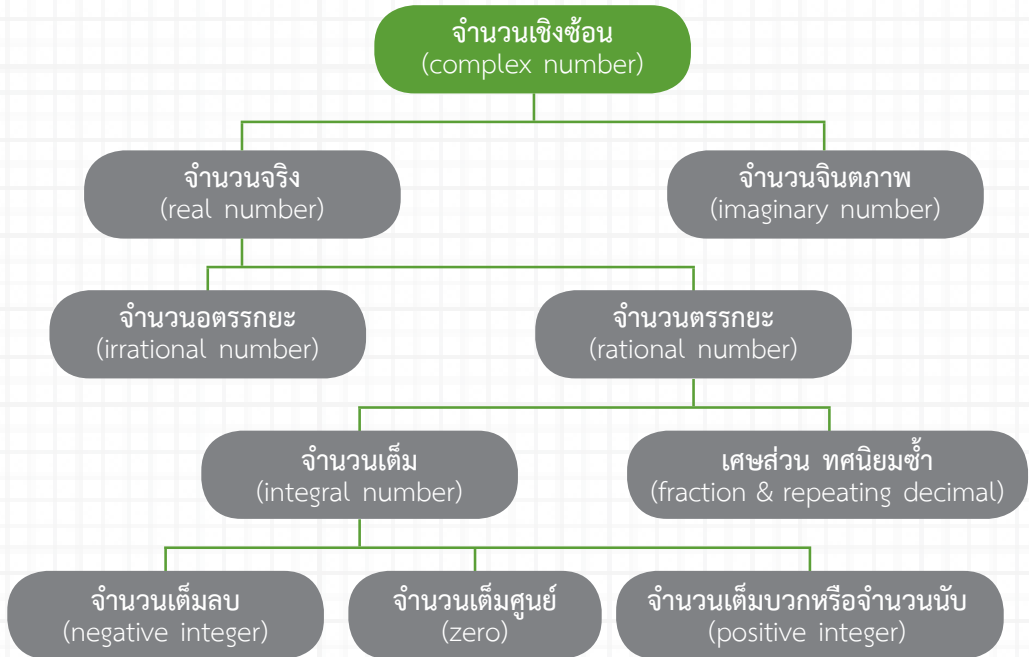
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4 | 145

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4 | 197



บทที่ 1

จำนวนและการดำเนินการ



จำนวนจริง (real number) ประกอบด้วย ☆

จำนวนอตรรกยะ : จำนวนที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มหรือทศนิยมไม่ซ้ำแบบไม่รู้จบ

จำนวนตรรกยะ : จำนวนที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มหรือทศนิยมซ้ำได้

→ จำนวนเต็ม แบ่งเป็น จำนวนเต็มลบ (I^-)
จำนวนเต็มศูนย์ (I^0)
จำนวนเต็มบวก (I^+)

→ เศษส่วน

→ ทศนิยมซ้ำ

บททวนความจำ!
ทศนิยมซ้ำ เช่น

$$0.03\dot{2} = 0.032222\ldots$$

$$3.9\dot{4}5 = 3.945454\ldots$$

แบบฝึกหัด 1.1 จงเขียนเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่เป็นจริง
และเครื่องหมาย × หน้าข้อความที่เป็นเท็จ

- ☐ 1) π เป็นจำนวนจริงที่เป็นจำนวนตรรกยะ
- ☐ 2) 0 เป็นจำนวนเต็มบวก
- ☐ 3) $-\frac{1}{6}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
- ☐ 4) 8.33333333... เป็นจำนวนอตรรกยะ
- ☐ 5) $\sqrt{9} - \sqrt{4}$ เป็นจำนวนเต็มบวก
- ☐ 6) $\sqrt{23}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
- ☐ 7) $2.8\bar{4}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- ☐ 8) $\sqrt{8} \div \sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
- ☐ 9) $2 - \sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
- ☐ 10) จำนวนเต็มลบที่น้อยที่สุดคือ -1
- ☐ 11) $-\sqrt{7}$ ไม่ใช่จำนวนเต็มลบ
- ☐ 12) 100,000,000 คือจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุด

O-net'57

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อใดเป็นจริง

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

2. $\sqrt{1+3+5+7+9} = 25$

3. $\frac{1}{33} = 0.30303030\ldots$

4. $3^5 + 3^5 + 3^5 = 3^6$



เฉลย

ตอบข้อ 4

แนวคิด

1. ผิด เพราะ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

2. ผิด เพราะ $\sqrt{1+3+5+7+9} = 5$

3. ผิด เพราะ $\frac{1}{33} = 0.03030303\ldots$

4. ถูก เพราะ $3^5 + 3^5 + 3^5 = 243 + 243 + 243 = 729 = 3^6$

รากที่สองของจำนวนจริง (square root) ☆

สมบัติของรากที่สอง

สมบัติ	รายละเอียด
$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$	เปลี่ยนรากที่สองให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังได้
$\sqrt{a} \geq 0$ เมื่อ $a \geq 0$	ภายใต้เครื่องหมายราก ($\sqrt{\quad}$) ค่าของ a ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0 เท่านั้น
$\sqrt{a^2} = a $	ค่าใดๆ เมื่อนำไปยกกำลังสองแล้วหรือหาค่าสัมบูรณ์ ต้องเป็นค่าบวกเท่านั้น
$(\sqrt{a})^2$ และ $(-\sqrt{a})^2 = a$	เมื่อยกกำลังสองรากที่สองของ a ทั้งสองแล้วจะได้ a
$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ เมื่อ $a, b \geq 0$	หาผลคูณก่อนแล้วค่อยถอดราก
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ เมื่อ $a, b \geq 0$	หาผลหารก่อนแล้วค่อยถอดราก

ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ($a \geq 0$) รากที่สองของ a คือจำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้ a

ถ้า a เป็นจำนวนเต็มบวก รากที่สองของ a มี 2 ราก คือรากที่เป็นบวกและรากที่เป็นลบ



ข้อควรรู้

รากที่สองของ a คือ $\pm\sqrt{a}$
รากที่สองของ 0 เท่ากับ 0

รากที่ n ของจำนวนจริง

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1
 a และ b เป็นจำนวนจริง b จะเป็น
 รากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $b^n = a$

เรียก $\sqrt[n]{a}$ ว่ารากที่ n ของ a
 หรือกรณีที่ n ของ a

สรุปหลักของรากที่ n ของ a

กรณี	n เป็นจำนวนคู่	n เป็นจำนวนคี่
$a < 0$	ไม่เป็นจำนวนจริง	$\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนเต็มลบ
$a = 0$	$\sqrt[n]{a} = 0$ เสมอ	
$a > 0$	$\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนเต็มบวก	

O-net'60

$\sqrt{256} - \sqrt[3]{64}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 8

2. 10

3. 12

4. 14



เฉลย

ตอบข้อ 3

แนวคิด

$$\begin{aligned}
 \sqrt{256} - \sqrt[3]{64} &= \sqrt{16 \times 16} - \sqrt[3]{4 \times 4 \times 4} \\
 &= 16 - 4 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

การหารากที่ n โดยการแยกตัวประกอบ มีวิธีการดังนี้

ข้อสังเกต: การหารากที่ n ของ
จำนวนจริงใด ๆ ตัวประกอบเฉพาะของ
จำนวนนั้นจะต้องมีอย่างน้อย n ตัวจึงจะ
ถอดรากที่ n ได้

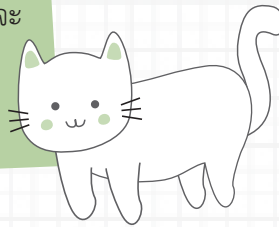
เช่น $\sqrt[3]{27} = \sqrt{3 \times 3 \times 3} = 3$

แบบฝึกหัด 1.2 จงหาลัทธิ

1) $\sqrt[9]{0}$

2) $\sqrt[3]{-8}$

3) $\sqrt{-9}$



ค.ร.น. และ ห.ร.ม. ★

ตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่นำไปหารด้วยจำนวนเต็มอื่น ๆ ตั้งแต่ 2 จำนวน
ขึ้นไปแล้วได้ผลลัพธ์ลงตัวทั้งหมด มีวิธีการหา ค.ร.น. ดังนี้

1) แยกตัวประกอบเฉพาะ หาได้จากผลคูณของจำนวนเฉพาะที่เหมือนกันบางส่วนของทุก
จำนวน

2) หารสัณด้วยจำนวนเฉพาะ จำนวนเฉพาะที่นำมาเป็นตัวหารต้องหารจำนวนเต็มนั้นลงตัว
อย่างน้อย 2 จำนวนขึ้นไป หารไปเรื่อย ๆ จนไม่มีจำนวนเฉพาะใดที่หารจำนวนทั้งหมดนั้น
ได้อีกแล้ว โดย ค.ร.น. คือผลลัพธ์ที่ได้จากการนำตัวหารทุกตัวและเศษทุกจำนวนมาคูณกัน

ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) จำนวนเต็มที่มากที่สุดที่นำไปหารจำนวนเต็มอื่น ๆ ตั้งแต่ 2 จำนวน
ขึ้นไปพร้อมกันแล้วได้ผลลัพธ์ลงตัวทั้งหมด มีวิธีการหา ห.ร.ม. ดังนี้

1) แยกตัวประกอบเฉพาะ หาได้จากผลคูณของจำนวนเฉพาะที่เหมือนกันทั้งหมดของทุก
จำนวน

2) หารสัณด้วยจำนวนเฉพาะ จำนวนเฉพาะที่นำมาเป็นตัวหารต้องหารทุกจำนวนลงตัว หาก
ไม่มีจำนวนเฉพาะใดที่หารได้อีกแล้ว จะหยุดหารแล้วเอาตัวหารทั้งหมดคูณกัน

ต้องการแบ่งนักเรียนชาย 25 คน และนักเรียนหญิง 20 คนเป็นกลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน
ให้จำนวนกลุ่มน้อยที่สุดได้กี่กลุ่ม

1. 4 กลุ่ม

2. 5 กลุ่ม

3. 9 กลุ่ม

4. 13 กลุ่ม



เฉลย

ตอบข้อ 3

แนวคิด

หาจำนวนคนในกลุ่มที่มากที่สุด = ห.ร.ม ของ 25 และ 20 = 5
แสดงว่าแบ่งได้กลุ่มละ 5 คน

ดังนั้นแบ่งนักเรียนชาย 25 คน กลุ่มละ 5 คน ได้ $\frac{25}{5} = 5$ กลุ่ม

แบ่งนักเรียนหญิง 20 คน กลุ่มละ 5 คน ได้ $\frac{20}{5} = 4$ กลุ่ม

รวมแบ่งได้จำนวนกลุ่มน้อยสุด $5 + 4 = 9$ กลุ่ม

เศษส่วน (fraction)



ตัวเศษ $\longrightarrow \frac{a}{b}$
ตัวส่วน $\longrightarrow b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$

การบวกลบเศษส่วนมีวิธีดังนี้

- 1) กรณีส่วนเท่ากัน นำตัวเศษมาบวกลบกันได้เลย ตัวส่วนจะมีค่าเท่าเดิม
- 2) กรณีส่วนไม่เท่ากัน ต้องทำให้ตัวส่วนเท่ากันก่อนด้วยการหา ค.ร.น. ของตัวส่วนทั้งหมด
เมื่อตัวส่วนเท่ากันแล้ว จึงนำตัวเศษของเศษส่วนมาบวกและลบกัน หรือคิดตามสูตรก็ได้

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd} \text{ เมื่อ } b \text{ และ } d \neq 0$$

แบบฝึกหัด 1.3 จงหาผลลัพธ์	
กรณีส่วนเท่ากัน	กรณีส่วนไม่เท่ากัน
1) $\frac{35}{5} + \frac{90}{5}$	2) $\frac{28}{27} - \frac{80}{81}$

การคูณและหารเศษส่วน

1) การคูณเศษส่วน

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \text{ เมื่อ } b \text{ และ } d \neq 0$$

2) การหารเศษส่วน

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \text{ เมื่อ } b, d \text{ และ } c \neq 0$$

แบบฝึกหัด 1.4 จงหาผลลัพธ์	
การคูณเศษส่วน	การหารเศษส่วน
1) $\frac{27}{30} \times 9 =$	3) $\frac{28}{27} \div 80 =$
2) $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5}$	4) $\frac{15}{3} \div \frac{9}{15} =$

เศษส่วนอย่างต่ำ เป็นค่าของเศษส่วนที่ถูกลดทอนให้ต่ำที่สุด ปกติแล้วคำตอบทางคณิตศาสตร์ ผลลัพธ์ควรอยู่ในรูปที่ทอนเป็นอย่างต่ำที่สุด หาเศษส่วนอย่างต่ำได้โดยดึงตัวร่วมของเศษและส่วนออกจากนั้นตัดตัวร่วมทิ้งไปเพราะผลหารมีค่าเท่ากับ 1

แบบฝึกหัด 1.5 จงเปลี่ยนรูปเศษส่วนต่อไปนี้ให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

1) $\frac{84}{119}$

2) $\frac{162}{108}$

O-net'58

พิจารณาข้อต่อไปนี้

ก. $\frac{5}{7} - \frac{5}{12} = \frac{5}{7} \times \frac{5}{12}$

ข. $7^3 \div 48 = 7\frac{7}{48}$

ข้อใดสรุปถูกต้อง

1. ข้อ ก ถูก ข้อ ข ถูก

2. ข้อ ก ถูก ข้อ ข ผิด

3. ข้อ ก ผิด ข้อ ข ถูก

4. ข้อ ก ผิด ข้อ ข ผิด



เฉลย

ตอบข้อ 1

แนวคิด

ก. $\frac{5}{7} - \frac{5}{12} = \frac{25}{84}$

$\frac{5}{7} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{84}$

ข. $7^3 \div 48 = \frac{343}{48} = 7\frac{7}{48}$

ดังนั้น ถูกทั้ง ก และ ข

การเปรียบเทียบเศษส่วน ต้องทำให้ส่วนเท่ากันก่อน จากการหา ค.ร.น. ของตัวส่วน แล้วเปรียบเทียบค่าของตัวเศษ

แบบฝึกหัด 1.6 จงเรียงลำดับเศษส่วน

1) จงเรียง $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$ จากน้อยไปมาก

2) จงเรียง $\frac{9}{10}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{8}$ จากมากไปน้อย

ทศนิยม (decimal) ☆

เป็นการเขียนแสดงจำนวนที่อยู่ในรูปเลขฐานสิบที่ไม่เต็มหน่วยเช่นเดียวกับเศษส่วน แต่ใช้วิธีการเขียนต่างกันคือส่วนที่ไม่เต็มหน่วยจะอยู่หลังจุดทศนิยม

ประเภทของทศนิยม

1) ทศนิยมไม่ซ้ำ แบ่งออกเป็น

- ➔ ไม่ซ้ำแบบรู้จบ: ตัวเลขหลังจุดไม่ซ้ำกันเป็นชุดตัวเลข ระบุตำแหน่งสุดท้ายของทศนิยมและเขียนเป็นเศษส่วนได้
- ➔ ไม่ซ้ำแบบไม่รู้จบ: ตัวเลขหลังจุดไม่ซ้ำกันและเขียนต่อไปได้เรื่อย ๆ ระบุตำแหน่งสุดท้ายของทศนิยมไม่ได้ เป็นจำนวนอตรรกยะเพราะเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มไม่ได้

2) ทศนิยมซ้ำ เป็นจำนวนตรรกยะ เนื่องจากเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ แบ่งเป็น

- ➔ ซ้ำแบบรู้จบ: ตัวเลขหลังจุดซ้ำกันเป็นชุด แต่ระบุตำแหน่งของทศนิยมได้ เช่น $2.777\dots$, $9.838383\dots$
- ➔ ซ้ำแบบไม่รู้จบ: ตัวเลขหลังจุดซ้ำกันเป็นชุด ๆ ต่อกันไปอย่างไม่สิ้นสุด ไม่สามารถระบุตำแหน่งทศนิยมได้ จึงใช้สัญลักษณ์จุดบนเลขบอกตัวเลขซ้ำแบบไม่รู้จบ

แบบฝึกหัด 1.7 จงเขียนทศนิยมซ้ำในรูปแบบย่อ

- 1) 0.444444... เขียนรูปแบบย่อ คือ _____ อ่านว่า _____
- 2) 2.565656... เขียนรูปแบบย่อ คือ _____ อ่านว่า _____
- 3) 0.789789... เขียนรูปแบบย่อ คือ _____ อ่านว่า _____
- 4) 8.000333... เขียนรูปแบบย่อ คือ _____ อ่านว่า _____
- 5) 6.002424... เขียนรูปแบบย่อ คือ _____ อ่านว่า _____

การเปลี่ยนทศนิยมให้เป็นเศษส่วน

ทศนิยมไม่ซ้ำ

- 1) ไม่ซ้ำแบบรู้จบ ทำได้โดยหารด้วย 10 หรือ 10^x ขึ้นอยู่กับจำนวนตำแหน่งของทศนิยม
 - ทศนิยม 1 ตำแหน่ง ให้หารเลขหลังจุดทศนิยมด้วย 10
 - ทศนิยม 2 ตำแหน่ง ให้หารเลขหลังจุดทศนิยมด้วย 100
 - ทศนิยม 3 ตำแหน่ง ให้หารเลขหลังจุดทศนิยมด้วย 1000

- 2) ไม่ซ้ำแบบไม่รู้จบ เป็นจำนวนอตรรกยะ เขียนเป็นเศษส่วนไม่ได้

ทศนิยมซ้ำ

- 1) ซ้ำแบบรู้จบ ทำวิธีเดียวกับทศนิยมไม่ซ้ำแบบรู้จบ
- 2) ซ้ำแบบไม่รู้จบ มีหลักเปลี่ยนเป็นเศษส่วนดังนี้
 - เป็นทศนิยมซ้ำทุกตำแหน่ง: ทศนิยมอาจจะมีเลขซ้ำเพียงตัวเดียวหรือเป็นชุดตัวเลขก็ได้หลักการคือ

นำตัวเลขที่ซ้ำมาเขียนเป็นเศษแล้วหารด้วย 9 โดยจำนวนของเลข 9 เท่ากับตำแหน่งซ้ำของทศนิยม

แบบฝึกหัด 1.8 จงเปลี่ยนทศนิยมให้เป็นเศษส่วน

1) 0.222222...	2) 3.262626...
3) 0.789789...	4) 8.191191...

→ เป็นทศนิยมซ้ำไม่ทุกตำแหน่ง: หลังทศนิยมมีตัวเลขเพียงบางส่วนที่ซ้ำกันเท่านั้น ให้เขียนเป็นเศษส่วนดังนี้

เศษ = ตัวเลขหลังจุดทศนิยมทั้งหมด - ตัวเลขที่ไม่ซ้ำ

ส่วน = เขียนเลข 9 จำนวนให้เท่ากับจำนวนตำแหน่งการซ้ำของทศนิยม และเติม 0 ไว้ด้านหลังตามจำนวนตำแหน่งที่ไม่ซ้ำ

แบบฝึกหัด 1.9 จงเปลี่ยนทศนิยมให้เป็นเศษส่วน

1) 0.000444...	2) 0.005656...
3) 6.12789789...	4) 0.23191191...

เลขนัยสำคัญ (significant figure) จำนวนหลักของตัวเลขที่แสดงความเที่ยงตรงที่คำนวณได้หรือวัดได้ วิธีพิจารณาเลขนัยสำคัญมีดังนี้

- 1) ตัวเลขทุกตัวยกเว้นศูนย์ที่มีเงื่อนไขเฉพาะถือเป็นเลขนัยสำคัญทั้งสิ้น เช่น
→ 134.1 » มีเลขนัยสำคัญ 4 ตัว, 26.983 » มีเลขนัยสำคัญ 5 ตัว
- 2) ศูนย์ที่อยู่ระหว่างเลขนัยสำคัญให้ถือเป็นเลขนัยสำคัญ เช่น
→ 502 » มีเลขนัยสำคัญ 3 ตัว, 30.0008 » มีเลขนัยสำคัญ 6 ตัว
- 3) ศูนย์ที่อยู่ทางซ้ายของจำนวนจะไม่นับเป็นเลขนัยสำคัญ เช่น
→ 0.0002 » มีเลขนัยสำคัญ 1 ตัว, 0.2 » มีเลขนัยสำคัญ 1 ตัว
- 4) ศูนย์ที่อยู่ท้ายจำนวนเต็มจะไม่นับเป็นเลขนัยสำคัญ เช่น
→ 3,000 » มีเลขนัยสำคัญ 1 ตัว, 30 » มีเลขนัยสำคัญ 1 ตัว
- 5) ศูนย์ที่อยู่ทางขวาของทศนิยมจะมีเลขนัยสำคัญเฉพาะตัวที่อยู่ทางขวามือของจุดทศนิยม เช่น
→ 0.4000 » มีเลขนัยสำคัญ 4 ตัว, 0.080 » มีเลขนัยสำคัญ 2 ตัว

การปัดทศนิยม

การเปลี่ยนเศษส่วนเป็นทศนิยมโดยวิธีตั้งหารยาว บางครั้งผลลัพธ์ที่ได้อาจเป็นทศนิยมหลายตำแหน่ง คือมากกว่า 2 หรือ 3 ตำแหน่งขึ้นไป หรือทศนิยมไม่รู้จบ ซึ่งโดยปกติแล้ว ข้อสอบส่วนใหญ่ จะตอบไม่เกิน 3 ตำแหน่ง หรืออาจกำหนดจำนวนเลขนัยสำคัญของคำตอบ นักเรียนจึงต้องรู้หลักการปัดเลขดังนี้

1) ตัวเลขที่ตามหลังเลขนัยสำคัญตัวสุดท้ายเป็นค่าอื่นที่ไม่ใช่ 5

- หากมีค่ามากกว่า 5 ให้ปัดขึ้น โดยปัดตัวเลขสุดท้ายทิ้งแล้วปัดตัวเลขที่อยู่ด้านหน้าเพิ่มขึ้น 1 ค่า
- หากมีค่าน้อยกว่า 5 ให้ปัดลง โดยปัดตัวเลขสุดท้ายทิ้งแล้วคงค่าอื่นไว้เท่าเดิม

2) ตัวเลขที่ตามหลังเลขนัยสำคัญตัวสุดท้ายมีค่าเท่ากับ 5 ให้แบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ

- เลขที่อยู่หน้าเลข 5 เป็นเลขคู่หรือศูนย์ให้ปัดลง โดยปัด 5 ทิ้งแล้วคงค่าอื่นไว้เท่าเดิม
- เลขที่อยู่หน้าเลข 5 เป็นเลขคี่ให้ปัดขึ้นโดยปัดเลข 5 ทิ้ง แล้วปัดตัวเลขที่อยู่ด้านหน้าเพิ่มขึ้น 1 ค่า

- 3) ตัวเลขที่ตามหลังเลขนัยสำคัญตัวสุดท้ายมีค่าเท่ากับ 5 และมีเลขตามหลัง 5 ให้ปัดขึ้น หากมีตัวเลขอยู่ด้านหลังเลข 5 ไม่ว่าจะเป็นเลขอะไรก็ตามที่ไม่ใช่ 0 ให้ปัดขึ้นทุกกรณี โดยปัดตัวเลข 5 และตัวเลขตามหลังทั้งหมดทิ้ง แล้วปัดตัวเลขที่อยู่ด้านหน้า 5 เพิ่มขึ้น 1 ค่า

แบบฝึกหัด 1.10 จงปัดทศนิยม		
ตอบเป็นทศนิยม 1 ตำแหน่ง	ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง	ตอบเป็นทศนิยม 3 ตำแหน่ง
1) 5.46	4) 3.052	7) 1.5567
2) 6.12	5) 8.231	8) 23.6454
3) 10.32	6) 3.4050	9) 50.11673

อัตราส่วนและร้อยละ ☆

อัตราส่วน (ratio) การเปรียบเทียบปริมาณตั้งแต่ 2 ปริมาณขึ้นไป อาจมีหน่วยเหมือนกันหรือต่างกันก็ได้

อัตราส่วน a ต่อ b เขียนแทนด้วย $a:b$ หรือ $\frac{a}{b}$

ประเภทของอัตราส่วน แบ่งออกเป็น 3 ประเภทดังนี้

- 1) **อัตราส่วนเชิงประกอบ** เกิดจากการนำอัตราส่วนตั้งแต่ 2 อัตราส่วนขึ้นไปมาคูณกันแบบต่อเนื่อง
- 2) **อัตราส่วนทวีคูณ** เกิดจากอัตราส่วนที่คูณอัตราส่วนตัวเดิมเข้าไป
- 3) **อัตราส่วนต่อเนื่อง** เป็นการเท่ากันของอัตราส่วนที่เชื่อมโยงความสัมพันธ์กันกับอัตราส่วนอื่นที่กำหนด ทำให้เกิดอัตราส่วนใหม่

การหาอัตราส่วนที่เท่ากัน แบ่งออกเป็น 3 วิธีดังนี้

หลักการคูณ	หลักการหาร	การคูณไขว้เพื่อตรวจสอบการเท่ากัน
นำจำนวนใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 เข้าไปคูณแต่ละจำนวนใน อัตราส่วน จะได้อัตราส่วนใหม่ เท่ากับอัตราส่วนเดิม $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$ เมื่อ $c \neq 0$	นำจำนวนใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 เข้าไปหารแต่ละจำนวนใน อัตราส่วน จะได้อัตราส่วนใหม่ เท่ากับอัตราส่วนเดิม $\frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}$ เมื่อ $c \neq 0$	เป็นการตรวจสอบอัตราส่วน 2 อัตราส่วนว่าเท่ากันหรือไม่ โดยใช้กฎการคูณไขว้ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ แล้ว $ad = bc$ เมื่อ $b, d \neq 0$

สัดส่วน (proportion) คือประโยคที่แสดงการเท่ากันของอัตราส่วน เช่น $5:7 = 10:14$

สมบัติของสัดส่วน เนื่องจากสัดส่วนคืออัตราส่วนที่เท่ากัน จึงมีสมบัติดังต่อไปนี้

การหาค่าตัวแปรในสัดส่วน ใช้หลักการคูณ การหาร หรือการคูณไขว้ แล้วแก้สมการ

ถ้า $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ แล้ว $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ และ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ เมื่อ a, b, c และ $d \neq 0$

แบบฝึกหัด 1.11 จงหาค่า x จากสมการ

1) $\frac{x+1}{3} = \frac{22}{6}$

วิธีทำ

ตอบ

2) $\frac{x-3}{4} = \frac{x+2}{2}$

วิธีทำ

ตอบ

$$3) \frac{15+x}{5} = \frac{x}{2}$$

วิธีทำ

ตอบ

$$4) \frac{4x+2}{-8} = \frac{x+6}{2}$$

วิธีทำ

ตอบ

โจทย์ปัญหาสัดส่วน ตั้งสัดส่วนจากโจทย์ พร้อมทั้งกำหนดตัวแปรที่โจทย์ต้องการหา แล้วแก้สมการตามปกติ

แบบฝึกหัด 1.12

เอ็มทำงาน 8 วัน ได้เงิน 896 บาท ส่วนเคทำงาน 17 วัน ได้เงิน 2,108 บาท จงหาอัตราส่วนรายได้ของเคต่อเอ็ม

วิธีทำ

ตอบ

ร้อยละ (percent) เป็นการเปรียบเทียบอัตราส่วนให้อยู่ในรูปส่วนที่เป็น 100 โดยใช้สัญลักษณ์
เปอร์เซ็นต์ (%)

ร้อยละ หรือ $\% = \frac{\text{เศษ}}{\text{ส่วน}} \times 100$
* สูตรนี้ได้มาจากการจัดรูปของบัญญัติไตรยางค์



แบบฝึกหัด 1.13

โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนทั้งหมด 2,500 คน เป็นนักเรียนหญิง 1,600 คน อยากทราบว่า
โรงเรียนนี้มีนักเรียนชายคิดเป็นร้อยละเท่าใด

วิธีทำ

ตอบ

กำไร-ขาดทุน (profit and loss)

1) คำศัพท์ที่ควรทราบ

- ➔ ต้นทุน ราคาที่ซื้อสินค้าชิ้น ๆ มา หรือเงินที่ใช้ลงทุนทั้งหมดที่ใช้ในการผลิตสินค้าชิ้น ๆ
- ➔ ราคาขาย ราคาที่ผู้ขายขายสินค้าชิ้นไป
- ➔ กำไร เงินส่วนต่างที่ได้จากราคาขายหลังจากหักต้นทุนแล้ว

$$\text{กำไร} = \text{ราคาขาย} - \text{ต้นทุน}$$

- ➔ ขาดทุน เงินที่สูญเสียไปหลังจากขายสินค้าที่หักต้นทุนแล้ว

$$\text{ขาดทุน} = \text{ต้นทุน} - \text{ราคาขาย}$$

2) การคำนวณเปอร์เซ็นต์ ใช้การเทียบบัญญัติไตรยางศ์ปกติ หรือจะใช้สูตรก็ได้

$$\text{เปอร์เซ็นต์กำไร} = \frac{\text{กำไร}}{\text{ต้นทุน}} \times 100 = \frac{\text{ราคาขาย} - \text{ต้นทุน}}{\text{ต้นทุน}} \times 100$$

$$\text{เปอร์เซ็นต์ขาดทุน} = \frac{\text{ขาดทุน}}{\text{ต้นทุน}} \times 100 = \frac{\text{ต้นทุน} - \text{ราคาขาย}}{\text{ต้นทุน}} \times 100$$

แบบฝึกหัด 1.14 โจทย์ปัญหาพื้นฐาน

แม่ค้าคนหนึ่งซื้อสินค้ามาในราคา 1,250 บาท แต่ขายไปในราคา 1,500 บาท จะได้กำไรกี่เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ

ตอบ

O-net'57

ถ้าร้านค้าคิดราคาขายกำไรไว้ราคาตัวละ 4,800 บาท จะได้กำไร 20% แต่ถ้าร้านค้าต้องการกำไร 75% ต้องคิดราคาขายกำไรไว้ตัวละกี่บาท

- | | |
|--------------|--------------|
| 1. 7,000 บาท | 2. 6,500 บาท |
| 3. 6,000 บาท | 4. 5,500 บาท |



แนวคิด

เฉลย

ตอบข้อ 1

หาราคาทุน ถ้ากำไรราคาทุน 100 บาท ราคาขาย 120 บาท

ถ้ากำไรราคาทุน x บาท ราคาขาย 4,800 บาท

$$\text{เขียนเป็นสัดส่วนได้ } \frac{x}{100} = \frac{4,800}{120}$$

$$x = \frac{4,800}{120} \times 100 = 4,000$$

จะได้ราคาทุนของกำไรเท่ากับ 4,000 บาท

ถ้าต้องการกำไร 75% หมายถึงทุน 100 บาท ราคาขาย 175 บาท

ดังนั้นต้องคิดราคาขายกำไรไว้ตัวละ 7,000 บาท

แบบฝึกหัด 1.15 โจทย์ปัญหาประยุกต์

- 1) ร้านค้าคิดราคาสินค้าเพื่อที่จะเอากำไร 20% ปรากฏว่าขายไม่ได้จึงประกาศลดราคา 10%
อยากทราบว่าถ้าขายสินค้าชนิดนี้ตามราคาที่เราประกาศลดจะได้กำไรกี่เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ

ตอบ

- 2) ถ้าขายปากกาได้กำไร 20% ขายสมุดได้กำไร 10% โดยต้นทุนของสมุดเป็นสามเท่าของปากกา การขายของครั้งนี้ได้กำไรกี่เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ

ตอบ

เลขยกกำลัง ★

a เป็นจำนวนใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\text{คูณกัน } n \text{ ตัว}}$ เรียกว่า เลขยกกำลัง โดยมี a เป็นฐาน และ n เป็นเลขชี้กำลัง

แบบฝึกหัด 1.16 เติมคำตอบลงในช่องว่าง

1) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$ $= 32$

2) $= 5^3 = 125$

3) $9 \times 9 \times 9 \times 9 =$ $=$

เลขยกกำลัง

- ➔ เลขยกกำลังเป็นจำนวนตรรกยะ เพราะเป็นเลขที่เขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนหรือทศนิยมซ้ำได้
- ➔ เลขยกกำลังจึงเป็นได้ทั้งจำนวนเต็มบวก เต็มลบ เต็มศูนย์และเศษส่วน

เมื่อ a เป็นจำนวนใด ๆ และ n, k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$$



ข้อควรรู้

- ➔ เลขยกกำลังที่มีฐานติดลบ แล้วเลขชี้กำลังเป็นจำนวนคี่ ค่าที่ได้ออกมาต้องเป็นจำนวนลบเท่านั้น
- ➔ เลขยกกำลังที่มีฐานติดลบ แล้วเลขชี้กำลังเป็นจำนวนคู่ ค่าที่ได้ออกมาต้องเป็นจำนวนบวกเท่านั้น

$$\frac{7}{2 \times 3^2 \times 5^2} - \frac{1}{2^2 \times 3^2 \times 5} \text{ มีค่าเท่ากับข้อใด}$$

1. $\frac{1}{150}$

2. $\frac{1}{75}$

3. 0.001

4. 0.01



เฉลย

ตอบข้อ 4

แนวคิด

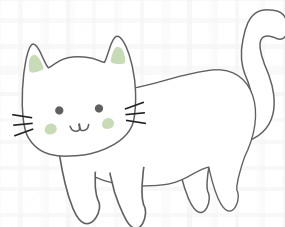
$$\begin{aligned} & \left(\frac{7}{2 \times 3^2 \times 5^2} \times \frac{2}{2} \right) - \left(\frac{1}{2^2 \times 3^2 \times 5} \times \frac{5}{5} \right) \\ &= \frac{14}{2^2 \times 3^2 \times 5^2} - \frac{5}{2^2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{9}{2^2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{1}{2^2 \times 5^2} = \frac{1}{100} \end{aligned}$$

สมบัติของเลขยกกำลัง

$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$
$a^m \div a^n = a^{m-n}, a \neq 0$	$\frac{1}{a^{-n}} = a^n, a \neq 0$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
$(ab)^n = a^n \times b^n$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$a^0 = 1$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

ข้อควรรู้

- ถ้า $a^m = a^n$ แล้วจะได้ว่า $m = n$ โดยที่ $a \neq 0$ หรือ 1
- ถ้า $a^m = b^m$ แล้วจะได้ว่า $m = 0$ โดยที่ $a, b \neq 0$ หรือ 1



การประยุกต์เลขยกกำลัง

1) รูปแบบสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

→ สัญกรณ์วิทยาศาสตร์ (scientific notation) คือการเขียนตัวเลขให้อยู่ในรูปของ

$a \times 10^n$ โดยที่ $1 \leq a < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

แบบฝึกหัด 1.17 จงเขียนในรูปแบบสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

- | | |
|----------------|------------------------------|
| 1) 8 → | 6) 53×10^{-9} → |
| 2) 2,000 → | 7) 109×10^2 → |
| 3) 72,000 → | 8) 0.04×10^{-2} → |
| 4) 0.0245 → | 9) $6,125 \times 10^3$ → |
| 5) 0.0000112 → | 10) $3,800 \times 10^{-3}$ → |

2) การหาค่าตัวแปรจากสมการ

แบบฝึกหัด 1.18 จงหาค่าของ x จากสมการที่กำหนดให้

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1) $8^{3x+5} = 4^{7x+5}$ | 2) $125^{6x+2} = 5^{2x+38}$ |
|--------------------------|-----------------------------|

เอกนามและพหุนาม

พื้นฐานที่ควรรู้

- ➔ ตัวแปร คือข้อความที่กล่าวถึงจำนวนทางคณิตศาสตร์โดยไม่ได้ระบุว่าจำนวนนั้นเป็นจำนวนใด สามารถผันค่าได้ ทั้งนี้มักนิยมใช้ตัวแปรเป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษ เช่น a , b , c , x , y และ z
- ➔ ค่าคงตัวหรือค่าคงที่ คือค่าหนึ่งของตัวเลขซึ่งกำหนดไว้ตายตัว หรืออาจเป็นค่าที่ไม่ระบุตัวเลข 1

ความรู้เพิ่มเติม นิพจน์ (expression) ทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 2 ส่วนคือ

1. ตัวถูกดำเนินการ (operand) คือค่าคงที่หรือตัวแปร เช่น 2 , 3 , a , b , y และ z
2. ตัวดำเนินการ (operator) คือเครื่องหมายทางคณิตศาสตร์ เช่น $+$, $-$, $\times$ และ $\div$

นิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูปการคูณของค่าคงตัวกับตัวแปรตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไป โดยที่เลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็น 0 หรือจำนวนเต็มบวก ประกอบด้วย 2 ส่วนหลักดังนี้

- 1) สัมประสิทธิ์ของเอกนาม คือค่าคงที่ในเอกนาม
- 2) ดีกรีของเอกนาม คือผลรวมของเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวในเอกนาม

แบบฝึกหัด 1.19

เอกนาม	สัมประสิทธิ์ของเอกนาม	ดีกรีของเอกนาม (ผลรวมของเลขชี้กำลังของตัวแปร)
1) $10x$		
2) $-3a^2b^3$		
3) $\frac{1}{6}hj^3k^4$		
4) $-\frac{1}{25}x^2y^6z^8$		

การบวกและการลบของเอกนาม

เอกนาม 2 ชุดจะบวกและลบกันได้นั้นต้องเป็นเอกนามคล้าย คือมีตัวแปรชุดเดียวกันและเลขชี้กำลังเท่ากันดังนี้

- 1) การบวกของเอกนาม คิดโดยนำสัมประสิทธิ์มาบวกกันให้เสร็จ แล้วคูณด้วยตัวแปร
- 2) การลบของเอกนาม คิดโดยนำสัมประสิทธิ์มาลบกันให้เสร็จ แล้วคูณด้วยตัวแปร

พหุนาม (polynomial)

นิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูปของเอกนามหรือผลบวกของเอกนามตั้งแต่ 2 เอกนามขึ้นไป

- 1) พจน์ของพหุนาม คือแต่ละเอกนามที่อยู่ในพหุนามนั้น ๆ
- 2) พหุนามในรูปผลสำเร็จ คือพหุนามที่ไม่มีเอกนามคล้ายกัน
- 3) ดีกรีของพหุนาม คือดีกรีสูงสุดของเอกนามในพหุนามในรูปผลสำเร็จ

แบบฝึกหัด 1.20

พหุนาม	พหุนามในรูปผลสำเร็จ	ดีกรีของพหุนาม
1) $5a^2b^3 - 4a^2b^3 + 3ab^2$		
2) $-85x^3y^7 + 50x^4y^5 + 50y^7x^3$		

การบวกและการลบของพหุนาม

ให้นำเอกนามที่คล้ายกันมาบวกลบกันตามปกติ

แบบฝึกหัด 1.21

1) จงหาผลบวกของพหุนาม

$$6a^3 + 3a^2 \text{ และ } 5a^3 + 7a^2$$

2) จงหาผลลบของพหุนาม

$$13b^3 + 2b^2 \text{ และ } 9b^3 - 7b^2$$

การคูณพหุนาม

- 1) การคูณเอกนามด้วยเอกนาม ให้นำค่าคงที่ในแต่ละเอกนามมาคูณกัน และนำตัวแปรแต่ละเอกนามมาคูณกัน โดยอาศัยสมบัติของเลขยกกำลัง
- 2) การคูณเอกนามด้วยพหุนาม ใช้สมบัติการแจกแจง โดยนำเอกนามไปคูณทุกพจน์ของพหุนาม
- 3) การคูณพหุนามด้วยพหุนาม ใช้สมบัติการแจกแจง โดยให้คูณแต่ละพจน์ของพหุนาม

การหารพหุนาม

- 1) การหารเอกนามด้วยเอกนาม ให้นำค่าคงที่ในแต่ละเอกนามมาหารกัน และนำตัวแปรแต่ละเอกนามมาหารกัน โดยอาศัยสมบัติของเลขยกกำลัง
- 2) การหารพหุนามด้วยเอกนาม ให้นำเอกนามที่เป็นตัวหารไปหารทุกพจน์ของพหุนามที่เป็นตัวตั้ง
- 3) การหารพหุนามด้วยพหุนาม ใช้วิธีตั้งหารยาว โดยเรียงดีกรีหรือกำลังของตัวแปรจากมากไปหาน้อย

แบบฝึกหัด 1.22 จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

1) $2y^3 \times (3y^2 - 6)$

2) $(6m^2 + 29m + 20) \div (m + 4)$

การหาเศษของพหุนามโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ทฤษฎีบทเศษเหลือ (remainder theorem)

เมื่อหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x - a$ เมื่อ a เป็นจำนวนใด ๆ แล้วเศษจากการหารพหุนาม $= P(a)$

แบบฝึกหัด 1.23

จงหาเศษจากพหุนาม $(5x^6 - 27x^4 + 2x^3 - 50x) \div (x + 2)$

วิธีทำ

ตอบ

การแยกตัวประกอบของพหุนาม

1) การดึงตัวร่วม เป็นวิธีปกติพื้นฐานที่ใช้ในการแยกตัวประกอบทั่วไป

2) การใช้ผลต่างกำลังสอง

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$n^2 - l^2 = (n - l)(n + l)$$

3) การแยกตัวประกอบ $x^2 + bx + c$ เมื่อ b และ c เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับ 0

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

$$\text{โดย } mn = c \text{ และ } m + n = b$$

4) การแยกตัวประกอบ $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a , b และ c เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับ 0

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q)$$

$$a = m \times n$$

$$c = p \times q$$

$$\therefore b = mq + np$$

5) การใช้กำลังสองสมบูรณ์

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

แบบฝึกหัด 1.24

จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 + 6x + 5$ โดยกำลังสองสมบูรณ์

วิธีทำ

ตอบ

สูตรแยกตัวประกอบที่สำคัญ

สูตรกำลังสอง	สูตรกำลังสาม
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$	$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$

เศษส่วนของพหุนาม

ถ้า m และ n เป็นพหุนาม และ $n \neq 0$ เรียก $\frac{m}{n}$ ว่า เศษส่วนของพหุนาม

- 1) การทำเศษส่วนให้อยู่ในรู้อย่างง่าย ใช้หลักการแยกตัวประกอบ หาชุดตัวเลขที่เหมือนกัน เพื่อตัดทอนทิ้งให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ
- 2) การบวกและการลบเศษส่วนของพหุนาม ใช้หลักการบวกลบเศษส่วนปกติ คือต้องทำตัวส่วนให้เท่ากันก่อน ถึงจะบวกลบกันได้
- 3) การคูณและการหารเศษส่วนของพหุนาม ใช้หลักการคูณและการหารเศษส่วนของจำนวนจริง

แบบฝึกหัด 1.25	
1) จงหาค่าของ $\frac{x-2}{x^2-4} - \frac{x-5}{x+2}$	2) จงหาค่าของ $\frac{a^3-8}{a^2-4} \times \frac{a^2+4a+4}{a^2+2a+4}$

- 4) การแก้สมการเศษส่วนพหุนาม ใช้หลักการแก้สมการที่เป็นเศษส่วนทั่วไปตามลำดับดังนี้
1. ทำให้ส่วนเท่ากันก่อน หรือทำให้ส่วนหายไปโดยการนำ ค.ร.น. ของตัวส่วนคูณตลอดทั้งสมการเพื่อให้ส่วนมีค่าเป็น 1
 2. ย้ายข้างสมการให้อีกด้านหนึ่งเป็น 0
 3. แยกตัวประกอบเพื่อหาค่าตัวแปร ทั้งนี้ค่าของตัวแปรที่ได้ต้องไม่ทำให้ส่วนเป็น 0
- 5) โจทย์ปัญหาเศษส่วนพหุนาม อ่านโจทย์ แล้วกำหนดตัวแปรเป็นคำตอบที่โจทย์ต้องการหา จากนั้นใช้หลักการแก้สมการเศษส่วนพหุนาม

แบบฝึกหัด 1.26

ลูกอมรสส้มขายในราคาบาทละ 2 เม็ด และลูกอมรสมะนาวขายในราคาบาทละ 3 เม็ด ถ้าซื้อลูกอมทั้ง 2 รสด้วยเงิน 30 บาท และได้ลูกอมมาทั้งหมด 70 เม็ด จะมีลูกอมรสส้มกี่เม็ด

วิธีทำ

ตอบ

สมการและอสมการ ★

สมการ (equation) ประโยคสัญลักษณ์ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของจำนวนโดยใช้สัญลักษณ์ “=” อยู่ในประโยคอาจเป็นจริงหรือเท็จก็ได้

คำตอบของสมการ จำนวนที่แทนตัวแปรในสมการแล้วทำให้สมการเป็นจริง

การแก้สมการ การหาค่าตัวแปรในสมการ โดยอาศัยสมบัติการเท่ากันมาช่วยแก้สมการ

สมบัติการเท่ากัน กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนใดๆ

สมบัติ	รายละเอียด
การสมมาตร	ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
การถ่ายทอด	ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
การบวก	ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
การตัดออกจำนวนที่เท่ากันของการบวก	ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$
การคูณ	ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$
การตัดออกจำนวนที่เท่ากันของการคูณ	ถ้า $ac = bc$ แล้ว $a = b$ เมื่อ $c \neq 0$

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สมการที่มีตัวแปรเพียงตัวแปรเดียวและมีดีกรีเป็น 1 โดยมีรูปแบบสมการดังนี้

$$ax + b = 0$$

เมื่อ $a \neq 0$ และ a, b เป็นค่าคงตัวที่มี x เป็นตัวแปร

สมการที่สมมูลกัน สมการที่มีคำตอบชุดเดียวกัน โดยสมการ A สมมูลกับสมการ B ก็ต่อเมื่อคำตอบทุกคำตอบของสมการ A เป็นคำตอบของสมการ B และคำตอบทุกคำตอบของสมการ B เป็นคำตอบของสมการ A

โจทย์สมการ มีขั้นตอนทำดังนี้

- 1) อ่านโจทย์ให้ดี แล้วกำหนดตัวแปรเป็นคำตอบที่โจทย์ต้องการหา
- 2) นำข้อมูลที่อ่านได้จากโจทย์มาเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์
- 3) ใช้หลักการแก้สมการจากสมบัติการเท่ากัน

O-net'55

ถ้า $2(2x-3) = 1-2x$ และ $8x-a = 2(x+1)$

มีคำตอบเท่ากัน แล้ว a มีค่าเท่าไร

1. -2

2. 1

3. 3

4. 5



เฉลย

ตอบข้อ 4

แนวคิด

สมการ (1)

$$2(2x-3) = 1-2x$$

$$4x-6 = 1-2x$$

$$4x+2x = 1+6$$

$$x = \frac{7}{6}$$

สมการ (2)

$$8x-a = 2(x+1)$$

$$8x-a = 2x+2$$

$$8x-2x = a+2$$

$$6x = a+2$$

แทนค่า $x = \frac{7}{6}$ จะได้ $6 \times \frac{7}{6} = a+2$

$$7 = a+2$$

$$a = 7-2$$

ดังนั้น

$$a = 5$$

อสมการ (inequality) ประโยคสัญลักษณ์ $>$, $<$, $\leq$, $\geq$ หรือ $\neq$ เพื่อบอกความสัมพันธ์ของจำนวน

คำตอบของอสมการ ช่วงคำตอบที่แทนตัวแปรในอสมการแล้วทำให้อสมการเป็นจริง นิยมตอบด้วยเส้นจำนวน

การแก้สมการ การหาค่าตัวแปรในอสมการ โดยอาศัยสมบัติการไม่เท่ากันมาช่วยในการแก้สมการ

สมบัติการไม่เท่ากัน กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนใดๆ

สมบัติ	รายละเอียด
1) การถ่ายทอด	ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$ ถ้า $a \geq b$ และ $b \geq c$ แล้ว $a \geq c$ ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$ ถ้า $a \leq b$ และ $b \leq c$ แล้ว $a \leq c$
2) การบวก	ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$ ถ้า $a \geq b$ แล้ว $a + c \geq b + c$ ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$ ถ้า $a \leq b$ แล้ว $a + c \leq b + c$
3) การตัดออกจำนวนที่เท่ากันของการบวก	ถ้า $a + c > b + c$ แล้ว $a > b$ ถ้า $a + c \geq b + c$ แล้ว $a \geq b$ ถ้า $a + c < b + c$ แล้ว $a < b$ ถ้า $a + c \leq b + c$ แล้ว $a \leq b$
4) การคูณ	ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$ ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$ ถ้า $a \geq b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac \geq bc$ ถ้า $a \geq b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac \leq bc$
5) การตัดออกจำนวนที่เท่ากันของการคูณ	ถ้า $ac > bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a < b$ ถ้า $ac < bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a > b$ ถ้า $ac \geq bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a \geq b$ ถ้า $ac \leq bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a \geq b$

โจทย์อสมการ มีขั้นตอนทำดังนี้

- 1) อ่านโจทย์ให้ดี แล้วกำหนดตัวแปรเป็นคำตอบที่โจทย์ต้องการหา
- 2) นำข้อมูลที่อ่านได้จากโจทย์มาเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์
- 3) ใช้หลักการแก้สมการจากสมบัติการไม่เท่ากัน

คำตอบ	เส้นจำนวนแสดงคำตอบ
$x \neq a$	
$x > a$	
$x \geq a$	
$x < a$	
$x \leq a$	

O-net'59

คุณครูมาลีซื้อปากกามาจำนวนหนึ่งเพื่อแจกให้นักเรียนในห้อง หลังจากแจกไปแล้ว 10 ด้าม
ปรากฏว่าเหลือปากกาไม่ถึง 24 ด้าม คุณครูมาลีซื้อปากกามากที่สุดกี่ด้าม

1. 14 ด้าม

2. 33 ด้าม

3. 34 ด้าม

4. 35 ด้าม



เฉลย

ตอบข้อ 2

แนวคิด

คุณครูมาลีซื้อปากกามากที่สุด x ด้าม

แจกไป 10 ด้าม เหลือปากกาไม่ถึง 24 ด้าม

เขียนเป็นอสมการได้ $x - 10 < 24$

แก้สมการเพื่อหาค่า x โดยใช้สมบัติการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก

$$x - 10 + 10 < 24 + 10$$

$$x < 34$$

ดังนั้นคุณครูมาลีซื้อปากกามากที่สุด 33 ด้าม

แบบฝึกหัด 1.27

- 1) เชือกเส้นหนึ่งยาว 20 เมตร นำมาขดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยให้ด้านกว้างสั้นกว่าด้านยาว 2 เมตร จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

วิธีทำ

ตอบ

- 2) จงหาคำตอบของอสมการ $7(x + 3) - 5 \leq 4x + 8$

วิธีทำ

ตอบ

สมการกำลังสอง

สมการกำลังสอง (quadratic equation) สมการที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $c \neq 0$ หลายครั้งไม่สามารถหาคำตอบได้ทันทีจากการใช้วิธีแยกตัวประกอบของพหุนามปกติ

วิธีแก้สมการกำลังสอง

- 1) จัดให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ เมื่อแยกตัวประกอบของสมการได้แล้ว จะอาศัยสมบัติที่ว่า
→ ถ้า $AB = 0$ แล้ว $A = 0$ หรือ $B = 0$
- 2) ใช้สูตร จากสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ แล้ว
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- 3) จำนวนคำตอบสมการกำลังสอง เราสามารถทราบจำนวนคำตอบของสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ ซึ่งค่า x หาได้จาก $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ ทำให้พิจารณาจำนวนคำตอบจากพจน์ $b^2 - 4ac$ ได้ดังต่อไปนี้
→ เมื่อ $b^2 - 4ac = 0$: สมการมีเพียงคำตอบเดียว คือ $\frac{-b}{2a}$
→ เมื่อ $b^2 - 4ac > 0$: สมการมี 2 คำตอบ คือ $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ และ $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
→ เมื่อ $b^2 - 4ac < 0$: ไม่มีคำตอบของสมการในระบบจำนวนจริง
- 4) ผลบวกรากและผลคูณราก ถ้า x_1 และ x_2 เป็นคำตอบของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ แล้ว
→ ผลบวกราก $(x_1 + x_2) = -\frac{b}{a}$ → ผลคูณราก $(x_1 \times x_2) = \frac{c}{a}$

โจทย์สมการกำลังสอง มีขั้นตอนทำดังนี้

- 1) อ่านโจทย์ให้ถี่ แล้วกำหนดตัวแปรเป็นคำตอบที่โจทย์ต้องการหา
- 2) นำข้อมูลที่อ่านได้จากโจทย์มาเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์
- 3) ใช้หลักการแก้สมการจากสมบัติการเท่ากัน

แบบฝึกหัด 1.28

1) จงหาค่า x จากสมการ $3x^2 + 13x - 30 = 0$

วิธีทำ

ตอบ

2) กำลังสองของจำนวนเต็มบวกที่เรียงติดกัน 3 จำนวน มีค่ารวมกันได้ 2,891 จำนวนที่มากที่สุดมีค่าเท่าใด

วิธีทำ

ตอบ

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

สมการเชิงเส้นสองตัวแปร สมการที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปร 2 ตัว และมีดีกรีของตัวแปรเป็น 1

รูปแบบของสมการเชิงเส้น

- 1) รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงเส้น $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B, C เป็นจำนวนจริงที่ A และ B ห้ามเป็น 0 พร้อมกัน
- 2) รูปมาตรฐานของสมการเชิงเส้น $y = mx + b$ รูปมาตรฐานมีประโยชน์และง่ายต่อการสังเกตกราฟเส้นตรง
 - โดยเมื่อ $m > 0$ กราฟจะเอียงขวาทำมุมแหลมกับแกน x
 - โดยเมื่อ $m < 0$ กราฟจะเอียงซ้ายทำมุมป้านกับแกน x

กราฟของสมการเชิงเส้น

วิธีวาดกราฟ

- จะวาดกราฟได้ต้องทราบจุดบนกราฟอย่างน้อย 2 จุด
- เริ่มต้นด้วยการหาจุดตัดแกน x โดยแทนค่า $y = 0$
- หาจุดเพิ่มด้วยการหาจุดตัดแกน y โดยการแทนค่า $x = 0$
- เมื่อได้จุดทั้ง 2 จุดแล้ว จะสร้างกราฟเส้นตรงได้โดยลากผ่านจุดทั้ง 2 จุด
- เพื่อป้องกันการคลาดเคลื่อนของกราฟ ควรหาจุดที่ 3 เพิ่ม โดยกำหนดค่า x ขึ้นมา เพื่อหาค่า y อีกค่า

การหาข้อมูลสำคัญของกราฟจากสมการ

- 1) การหาความชันและจุดตัดแกน y จากรูปมาตรฐานของสมการเชิงเส้น
 - จากสมการ $y = mx + b$
มีความชัน $= m$ และ จุดตัดแกน $y = (0, b)$

2) การหาความชันและจุดตัดแกน y จากรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้น

→ จัดรูปเปรียบเทียบกับสมการที่รูปมาตรฐานได้ดังนี้

$$\text{จากสมการ } Ax + By + C = 0$$

$$\text{จัดรูป} \quad By = -Ax - C$$

$$y = \frac{-Ax - C}{B}$$

$$y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B}$$

$$\text{เทียบรูปมาตรฐาน } y = mx + b$$

$$\text{มีความชัน (m)} = -\frac{A}{B} \text{ และ จุดตัดแกน } y = (0, -\frac{C}{B})$$

วิธีหาคำตอบจากสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

แบ่งเป็น 2 วิธีหลัก คือหาคำตอบสมการจากการวาดกราฟ และการแก้สมการทางพีชคณิต

1) วิธีวาดกราฟ มีขั้นตอนดังนี้

1. วาดกราฟจากสมการที่โจทย์กำหนดโดยการหาจุดตัดแกน y และจุดตัดแกน x จากนั้นลากเส้นเชื่อมจุดทั้ง 2 จุด
2. หาจุดตัดของกราฟ โดยการลากเส้นต่อเพื่อให้กราฟทั้ง 2 เส้นตัดกัน
3. อ่านคู่อันดับของจุดตัดที่เกิดขึ้น
4. คำตอบของสมการคือจุดตัดของกราฟ

2) วิธีแก้สมการทางพีชคณิต แบ่งออกเป็น 2 วิธี

1. วิธีกำจัดตัวแปร มีขั้นตอนดังนี้

- พิจารณาสมการที่โจทย์กำหนดให้ เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ว่ามีสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรใดเท่ากันหรือไม่
- ถ้าไม่มีสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรใดเท่ากันเลย ก็ทำให้เท่ากัน โดยหา ค.ร.น. แล้วนำไปคูณตลอดทั้งสมการ
- ถ้าสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรใดเท่ากันแล้ว สามารถนำสมการมาบวกหรือลบกันได้เลย เพื่อกำจัดตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งทิ้งไป

→ เมื่อได้ค่าของตัวแปรตัวหนึ่งออกมาแล้ว นำไปแทนค่ากลับในสมการใดสมการหนึ่ง เพื่อหาค่าตัวแปรที่เหลือ

2. วิธีแทนค่าตัวแปร มีขั้นตอนดังนี้

→ พิจารณาสมการที่โจทย์กำหนดให้ เลือกสมการที่ซับซ้อนน้อยกว่าในการจัดรูป เช่น ถ้ามีสมการดีกรี 2 กับสมการดีกรี 1 ให้เลือกสมการดีกรี 1 มาจัดรูปตัวแปร

→ จัดรูปของตัวแปรหนึ่งให้อยู่ในรูปของตัวแปรหนึ่ง แล้วแทนค่ากลับลงในอีกสมการ

→ เมื่อได้ค่าของตัวแปรตัวหนึ่งออกมาแล้ว นำไปแทนค่ากลับในสมการ เพื่อหาค่าตัวแปรที่เหลือ

โจทย์ปัญหาระบบสมการ มีขั้นตอนดังนี้

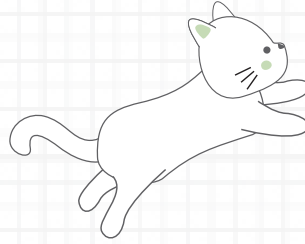
- 1) อ่านโจทย์ให้ดี แล้วกำหนดตัวแปรเป็นคำตอบที่โจทย์ต้องการหา
- 2) นำข้อมูลที่อ่านได้จากโจทย์มาเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์
- 3) ใช้วิธีหาคำตอบจากระบบสมการตามความเหมาะสม ไม่ว่าจะเป็นวิธีวาดกราฟหรือแก้สมการทางพีชคณิต



ข้อควรรู้

→ สมการ n ตัวแปร จะแก้คำตอบได้ก็ต่อเมื่อมีสมการอย่างน้อย n สมการ

→ ไม่สามารถหาค่าตัวแปรทุกตัวได้พร้อมกันในขั้นตอนเดียว จะได้ค่าตัวแปรค่าใดค่าหนึ่งก่อนเสมอ แล้วนำไปแทนค่าเพื่อหาตัวแปรค่าที่เหลือ



O-net'60

กำหนดให้ a และ b เป็นค่าคงตัว ถ้า $y = ax + b$ มีกราฟเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, 10)$ และขนานกับเส้นตรง $y = 2x$ แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใด

1. 6

2. 10

3. 12

4. 13



เฉลย

ตอบข้อ 1

แนวคิด

โจทย์กำหนดให้ $y = ax + b$ ขนานกับเส้นตรง $y = 2x$

แสดงว่ามีความชันเท่ากัน

แสดงว่า $a = 2$

โจทย์กำหนดให้ $y = ax + b$ ผ่านจุด $(3, 10)$

แสดงว่าแทน $x = 3$ และ $y = 10$ จะทำให้สมการเป็นจริง

นั่นคือ

$$10 = 3a + b$$

แทน $a = 2$ จะได้

$$10 = (3 \times 2) + b$$

$$10 = 6 + b$$

$$b = 4$$

ดังนั้น $a + b = 2 + 4 = 6$

แบบฝึกหัด 1.29

จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้ พร้อมวาดกราฟ

$$2x + y = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x + 2y = 9 \quad \dots \textcircled{2}$$

วิธีทำ

ตอบ

แบบฝึกหัด 1.30

นักเรียนกลุ่มหนึ่งมี 8 คน ตกลงกันจะออกเงินซื้อต้นไม้ต้นหนึ่งราคา 300 บาท มาปลูกในโรงเรียนตามโครงการสวนสวยโรงเรียนงาม โดยนักเรียนชายและนักเรียนหญิงออกเงินฝ่ายละครึ่งของราคาต้นไม้ แต่นักเรียนชายออกเงินมากกว่านักเรียนหญิงคนละ 20 บาท ดังนั้นนักเรียนกลุ่มนี้จะมีนักเรียนหญิงมากกว่านักเรียนชายกี่คน

วิธีทำ

ตอบ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

- 1) สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีอัตราส่วนของความยาวฐานต่อความสูงเป็น $3 : 5$ จะต้องลดความสูงลงกี่เซนติเมตร จึงจะทำให้อัตราส่วนของความยาวฐานต่อความสูงเปลี่ยนเป็น $2 : 3$ ถ้าเดิมสามเหลี่ยมรูปนี้มีพื้นที่ 120 ตารางเซนติเมตร

วิธีทำ

ตอบ

- 2) ผลสอบกลางภาคของเด็กหญิงน้ำใสได้คะแนนดังต่อไปนี้ วิชาฟิสิกส์ได้ 15 คะแนน จาก 20 คะแนน วิชาชีววิทยาได้ 39 คะแนน จาก 50 คะแนน และวิชาเคมีได้ 18 คะแนน จาก 25 คะแนน จงหาว่าเด็กหญิงน้ำใสได้คะแนนวิชาอะไรดีที่สุด

วิธีทำ

ตอบ

3) ทีมบาสเกตบอลของโรงเรียนแห่งหนึ่งแข่งขันชนะ 75% ของจำนวนครั้งที่ลงแข่งขัน ถ้าทีมนี้ลงแข่ง 24 ครั้ง แสดงว่าแพ้หรือเสมอรวมกันกี่ครั้ง

วิธีทำ

ตอบ

4) นายบอสเป็นพ่อค้าในตลาด ซื้อมะนาวมาขายที่ราคา 4 บาท 5 ผล แต่นำมะนาวล็อตนั้นมาขายที่ร้านตัวเองในราคา 5 บาท 4 ผล จงหาว่านายบอสได้กำไรร้อยละเท่าใด

วิธีทำ

ตอบ

- 5) ซื้อส้มเขียวหวานมา 2 ชนิด ชนิดแรกราคากิโลกรัมละ 9 บาท ชนิดที่สองราคากิโลกรัมละ 13.50 บาท นำมาคละกัน แล้วขายไปกิโลกรัมละ 12 บาท ได้กำไร 20% จงหาอัตราส่วนการผสม

วิธีทำ

ตอบ

- 6) ช่างขับรถได้ระยะทาง 36 กิโลเมตรในเวลาครึ่งชั่วโมง ส่วนเอกขับรถด้วยความเร็ว 15 เมตรต่อวินาที จงหาว่าช่างหรือเอกผู้ใดขับรถด้วยอัตราเร็วมากกว่ากันในหน่วยเมตรต่อวินาที

วิธีทำ

ตอบ

7) หน้อยมีเงินอยู่ 20,000 บาท นำไปฝากธนาคารได้ดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี กับนำไปให้แม่ค้าที่ตลาดกุ่มโดยคิดดอกเบี้ยร้อยละ 1 ต่อเดือนและเก็บดอกเบี้ยเป็นรายเดือน ในเวลา 2 ปี แต่ละกรณีจะให้รายได้แก่หน้อยแตกต่างกันเท่าไร

วิธีทำ

ตอบ

8) เด็กคนหนึ่งเดินจากบ้านไปสถานีรถไฟเพื่อไปโรงเรียน เขาพบว่าถ้าเดินทางด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 3.5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะต้องรอรถไฟ 30 นาที แต่ถ้าเดินทางจากบ้านด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เขาจะถึงสถานีช้ากว่ารถไฟมา 45 นาที จงหาว่าบ้านของเขายู่ห่างจากสถานีรถไฟกี่กิโลเมตร

วิธีทำ

ตอบ

9) รถยนต์คันหนึ่งแล่นด้วยอัตราเร็วคงที่ 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จากกรุงเทพฯไปสุรินทร์ระยะทางประมาณ 420 กิโลเมตร จะใช้เวลานานกี่ชั่วโมงและนาที

วิธีทำ

ตอบ

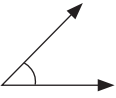
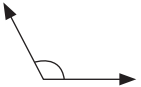
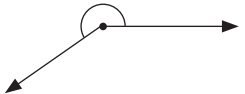
10) ก และ ข อยู่ห่างกัน 100 กิโลเมตร ออกเดินทางพร้อมกันโดยหันหน้าเข้าหากัน โดย ก หยุดพัก 2 ชั่วโมงแล้วเดินทางต่อ ทั้งนี้ ก และ ข เดินทางด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 4 และ 5 กิโลเมตรต่อชั่วโมงตามลำดับ เมื่อพบกัน ข เดินทางได้กี่กิโลเมตร

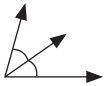
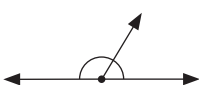
วิธีทำ

ตอบ

การสร้างทางเรขาคณิต ★

ศัพท์คณิตศาสตร์พื้นฐานในเรขาคณิต

ศัพท์คณิตศาสตร์	นิยาม	ตัวอย่าง
ส่วนของเส้นตรง	ส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่มีจุดปลาย 2 จุด	 เขียนแทนด้วย $\overline{AB}$
รังสี	ส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่มีจุดปลายจุดเดียว มีความยาวไม่จำกัด แสดงทิศทางด้วยหัวลูกศร	 เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{AB}$
มุม	รังสี 2 เส้นที่มีจุดเริ่มต้นเดียวกันเรียกว่า “จุดยอดมุม” โดยรังสี 2 เส้นนี้เรียกว่า “แขนของมุม”	
มุมแหลม	มุมที่มีขนาดมากกว่า 0° แต่น้อยกว่า 90°	
มุมฉาก	มุมที่มีขนาดเท่ากับ 90°	
มุมป้าน	มุมที่มีขนาดมากกว่า 90° แต่น้อยกว่า 180°	
มุมตรง	มุมที่มีขนาดเท่ากับ 180°	
มุมกลับ	มุมที่มีขนาดมากกว่า 180° แต่น้อยกว่า 360°	

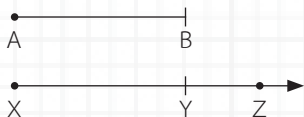
มุมประชิด	มุมที่มีจุดยอดมุมร่วมกันและแขนร่วมกัน 1 ข้าง	
มุมประกอบ หนึ่งมุมฉาก	มุมประชิดที่รวมกันแล้วมีขนาดเท่ากับ 90° หรือ 1 มุมฉาก	
มุมประกอบ สองมุมฉาก	มุมประชิดที่รวมกันแล้วมีขนาดเท่ากับ 180° หรือ 2 มุมฉาก	

การสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิต

กลุ่มที่ 1 การสร้างส่วนของเส้นตรง

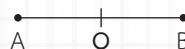
1. การสร้างส่วนของเส้นตรงให้ยาว
เท่ากับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

เช่น การสร้าง $\overline{XY}$ ให้มีความยาวเท่ากับ $\overline{AB}$



2. การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่
กำหนดให้

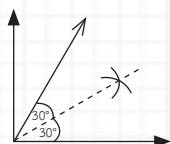
เช่น การแบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ทำได้โดยหา
จุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$



กลุ่มที่ 2 การสร้างมุม

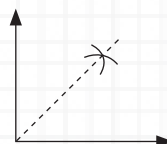
3. การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาด
ของมุมที่กำหนดให้

เช่น สร้างมุม 60° จากมุม 30° โดยใช้วงเวียน



4. การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

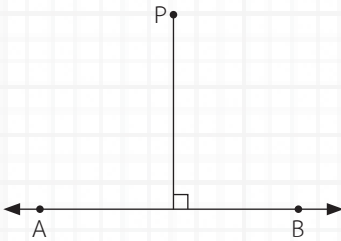
เช่น แบ่งครึ่งมุมฉากโดยใช้วงเวียน



กลุ่มที่ 3 การสร้างเส้นตั้งฉาก

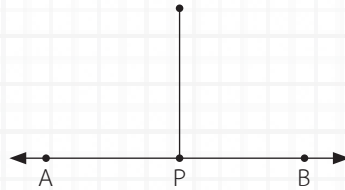
5. การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอก
มายังเส้นตรงที่กำหนดให้

เช่น การสร้างส่วนของเส้นตรงจากจุด P
ให้ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$



6. การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดบน
เส้นตรงที่กำหนดให้

เช่น การสร้างเส้นตั้งฉากกับ AB ที่จุด P
ทำได้โดยสร้างส่วนของเส้นตรงหรือเส้นตรง
ให้ทำมุมฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด P

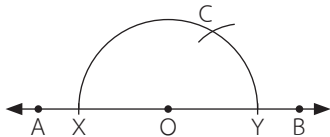
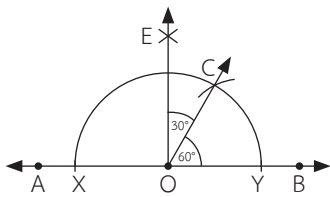


การสร้างรูปเรขาคณิตสองมิติ

การสร้างมุมที่มีขนาดต่าง ๆ

เราสร้างมุมที่มีขนาด 0° , 180° และ 360° ได้โดยใช้เพียงเส้นตรงเท่านั้น สำหรับมุมที่มีขนาด
อื่นๆ เช่น 90° และ 60° อาศัยความรู้เกี่ยวกับการสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิตมาช่วยสร้างมุมโดยใช้
วงเวียนได้ดังนี้

ขนาดมุม	วิธีสร้างมุม	รูป
มุม 90°	- ลาก $\overleftrightarrow{PQ}$ และให้จุด A เป็นจุดหนึ่งบน $\overleftrightarrow{PQ}$ - ที่จุด A สร้าง $\overleftrightarrow{AE}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{PQ}$ - จะได้ $\angle PAE = \angle QAE = 90^\circ$	

ขนาดมุม	วิธีสร้างมุม	รูป
มุม 60°	- ลาก $\overline{AB}$ และให้จุด O เป็นจุดหนึ่งบน $\overline{AB}$ - ใช้จุด O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี $\overline{OY}$ เขียนเส้นโค้งตัดส่วนโค้ง XY ที่จุด C - ลาก $\overline{OC}$ - จะได้ $\angle YOC = 60^\circ$	ลองฝึกวาดต่อนะครับ.... 
มุม 75°	- ลาก $\overline{AB}$ และให้จุด O เป็นจุดหนึ่งบน $\overline{AB}$ - สร้าง $\overline{OC}$ ให้ทำมุม 60° กับ $\overline{OB}$ - สร้าง $\overline{OE}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ จะได้ $\angle COE = 30^\circ$ - สร้าง $\overline{OJ} \rightarrow$ ให้แบ่งครึ่ง $\angle COE$ จะได้ $\angle COJ = 15^\circ$ - จะได้ $\angle YOJ = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$	ลองฝึกวาดต่อนะครับ.... 

แบบฝึกหัด 2.1 ลองสร้างมุมต่อไปนี้

1) 22.5°

2) 135°

3) 240°

การสร้างรูปสามเหลี่ยม

การสร้างรูปสามเหลี่ยมโดยใช้วงเวียนและสันตรงอาศัยแนวคิดของการสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิตรวมทั้งความรู้เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต

แบบฝึกหัด 2.2

- 1) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว MNO เมื่อกำหนดให้ MN เป็นฐานยาว a หน่วย และมุมที่ฐานมีขนาด 30°

วิธีทำ

- 2) จงสร้างรูปสามเหลี่ยม โดยให้มุมมุมหนึ่งมีขนาด 75° และด้านประกอบมุมนั้นยาว a และ b หน่วย

วิธีทำ

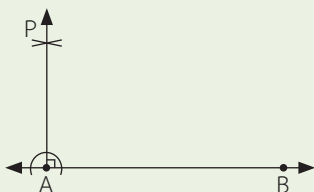
การสร้างเส้นขนาน

การสร้างเส้นขนานโดยใช้วงเวียนและสันตรงอาศัยแนวคิดของการสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิต รวมทั้งความรู้เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต

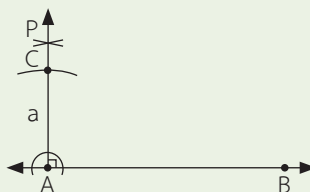
ตัวอย่าง จงสร้างเส้นตรงให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ และมีระยะห่างตามที่กำหนดให้ กำหนด $\overleftrightarrow{AB}$ และส่วนของเส้นตรงที่ยาว a หน่วย ดังรูป

$\overline{\hspace{2cm}}$
 a

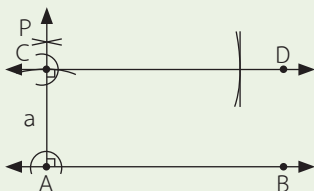
1) ที่จุด A สร้าง $\overleftrightarrow{AP}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AB}$



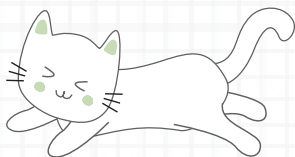
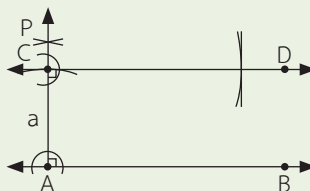
2) สร้าง $\overline{AC}$ บน $\overleftrightarrow{AP}$ ยาว a หน่วย



3) ที่จุด C สร้าง $\overleftrightarrow{CD}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{AP}$



4) จะได้ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{AB}$ และมีระยะห่างกันเท่ากับ a หน่วย



การสร้างรูปสี่เหลี่ยม

การสร้างรูปสี่เหลี่ยมประเภทต่าง ๆ ด้วยวงเวียนและสันตรงจำเป็นต้องทราบสมบัติต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิต และต้องอาศัยแนวคิดของการสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิต

แบบฝึกหัด 2.3

กำหนดให้ส่วนของเส้นตรงยาว a หน่วย

จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้างและความยาว a หน่วยและ $2a$ หน่วย ตามลำดับ

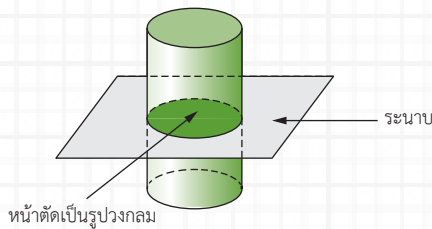
วิธีทำ



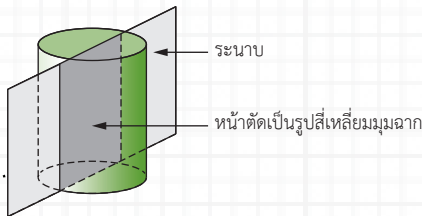
มิติสัมพันธ์ ☆

หน้าตัดของรูปเรขาคณิตสามมิติ

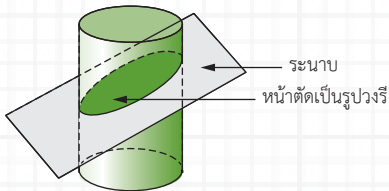
หน้าตัด (section) หรือภาคตัดบนระนาบ เกิดจากการใช้ระนาบตัดรูปเรขาคณิตสามมิติ โดยรูปที่ได้จากการตัดจะเป็นรูปเรขาคณิตชนิดใดนั้น ขึ้นอยู่กับแนวการตัดและชนิดของรูปเรขาคณิตสามมิติ



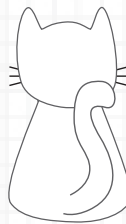
ถ้าใช้ระนาบตัดทรงกระบอกในแนวนานกับฐาน
จะได้หน้าตัดเป็นรูปวงกลม



ถ้าใช้ระนาบตัดทรงกระบอกในแนวตั้งฉากกับฐาน
จะได้หน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก



ถ้าใช้ระนาบตัดทรงกระบอกในแนวเฉียง
ทำมุม 45° กับฐานของทรงกระบอก
จะได้หน้าตัดเป็นรูปวงรี

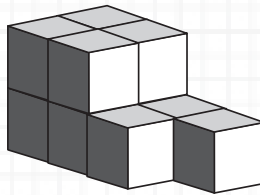


รูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากลูกบาศก์

รูปเรขาคณิตที่ประกอบขึ้นจากลูกบาศก์เกิดจากการนำลูกบาศก์ขนาด 1 ลูกบาศก์หน่วยมาต่อกัน ภาพที่ได้จากการมองรูปเรขาคณิตที่ประกอบขึ้นจากลูกบาศก์ก็มองได้ 3 แบบ เช่นเดียวกับการมองรูปเรขาคณิตจากด้านต่าง ๆ ได้แก่

- ภาพที่ได้จากการมองทางด้านหน้า (front view)
- ภาพที่ได้จากการมองทางด้านข้าง (side view)
- ภาพที่ได้จากการมองทางด้านบน (top view)

พิจารณารูปเรขาคณิตที่ประกอบขึ้นจากลูกบาศก์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้



เขียนภาพที่ได้จากการมองทางด้านหน้า ได้ดังนี้

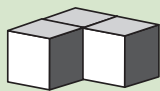
2	2		
2	2	2	1

เขียนภาพที่ได้จากการมองทางด้านข้าง ได้ดังนี้

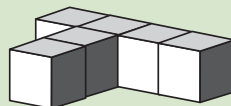
2	2
3	4

เขียนภาพที่ได้จากการมองทางด้านบน ได้ดังนี้

2	2	1	
2	2	1	1



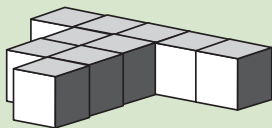
A



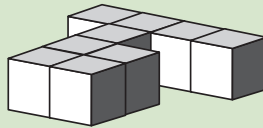
B

รูปในข้อใดต่อไปนี่ที่ไม่ได้ใช้รูปทรงมิติ A, B มาประกอบกัน

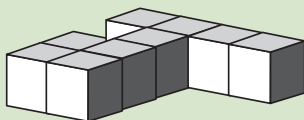
1.



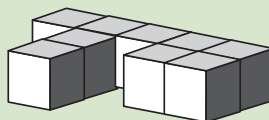
2.



3.



4.

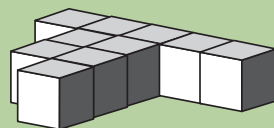


เฉลย

ตอบข้อ 1

แนวคิด

หารูป B ในข้อ 1 แล้วจะเห็นว่าลูกบาศก์ที่มีเกินรูป B ไม่มีเค้าโครงของรูป A และยังมีลูกบาศก์เกินมาอีกด้วย

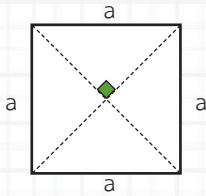


สูตรหาพื้นที่รูปเรขาคณิตสองมิติ ☆

1. สี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือสี่เหลี่ยมด้านเท่า หรือสี่เหลี่ยมมุมฉาก

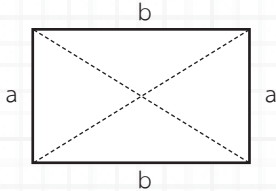
สูตรหาพื้นที่: ด้าน $\times$ ด้าน,
 $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม

สูตรหาความยาวรอบรูป: $4a$



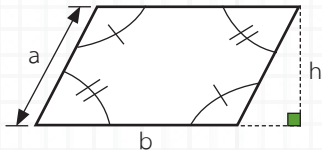
2. สี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือสี่เหลี่ยมมุมฉาก

สูตรหาพื้นที่: กว้าง $\times$ ยาว
 สูตรหาความยาวรอบรูป: $2a + 2b$



3. สี่เหลี่ยมด้านขนาน

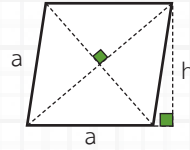
สูตรหาพื้นที่: ฐาน (b) $\times$ สูง (h)
 สูตรหาความยาวรอบรูป: $2a + 2b$



4. สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

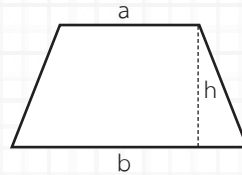
สูตรหาพื้นที่: ฐาน (a) $\times$ สูง (h),
 $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม

สูตรหาความยาวรอบรูป: $2a + 2a$



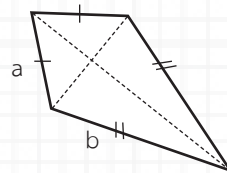
5. สี่เหลี่ยมคางหมู

สูตรหาพื้นที่:
 $\frac{1}{2} \times$ ผลบวกด้านคู่ขนาน (a + b) $\times$ สูง (h)



6. สี่เหลี่ยมรูปร่าง

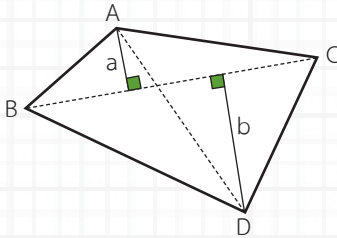
สูตรหาพื้นที่: $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของเส้นทแยงมุม
 สูตรหาความยาวรอบรูป: $2a + 2b$



7. สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าหรือสี่เหลี่ยมใดๆ

สูตรหาพื้นที่: $\frac{1}{2} \times \text{ผลบวกของเส้นกึ่ง} (a + b) \times \text{เส้นทแยงมุม} (\overline{BC})$

สูตรหาความยาวรอบรูป: $\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DC} + \overline{CA}$

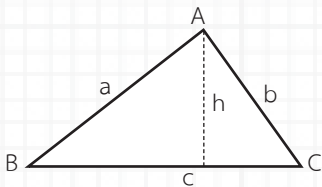


8. สามเหลี่ยมใดๆ

สูตรหาพื้นที่: $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} (c) \times \text{สูง} (h)$

*ถ้าเป็น Δ ด้านเท่า: $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{ด้าน})^2$

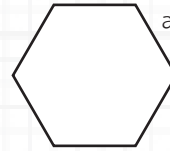
**ถ้ารู้ความยาว 2 ด้าน 1 มุม สูตรหาพื้นที่คือ $\frac{1}{2} \times (\text{ความยาว 2 ด้านคูณกัน}) \times \sin \text{ ของมุมนั้น}$



9. หกเหลี่ยมด้านเท่า

สูตรหาพื้นที่: $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{ด้าน})^2 \times 6$

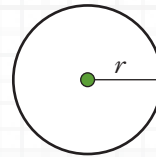
สูตรหาความยาวรอบรูป: $6a$



10. วงกลม

สูตรหาพื้นที่: πr^2

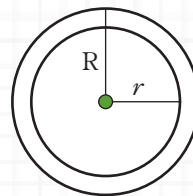
สูตรหาเส้นรอบวง: $2\pi r$



11. วงแหวน

สูตรหาพื้นที่: $\pi(R^2 - r^2) = \pi(R - r)(R + r)$

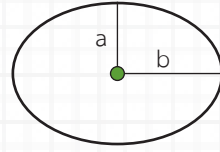
หรือนำพื้นที่วงกลมใหญ่
- พื้นที่วงกลมเล็ก



12. วงรี

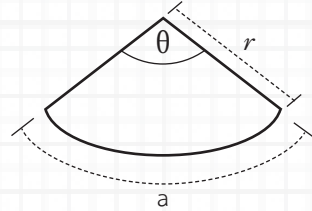
สูตรหาพื้นที่: πab

สูตรหาเส้นรอบวง: $2\pi \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$



13. สามเหลี่ยมฐานโค้ง

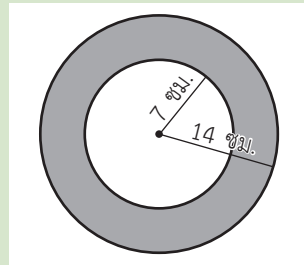
สูตรหาพื้นที่: $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$ หรือ $\frac{1}{2} \times r \times a$



O-net'51

จากรูป จงหาพื้นที่ในส่วนที่แรเงา

1. 462 ตารางเซนติเมตร
2. 562 ตารางเซนติเมตร
3. 662 ตารางเซนติเมตร
4. 762 ตารางเซนติเมตร



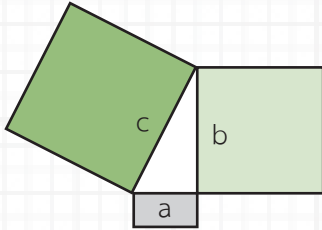
แนวคิด

เฉลย

ตอบข้อ 1

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ส่วนที่แรเงา} &= \text{พื้นที่ของวงกลมใหญ่} - \text{พื้นที่ของวงกลมเล็ก} \\ &= \pi R^2 - \pi r^2 \\ &= \pi(R^2 - r^2) \\ &= \left(\frac{22}{7}\right)(14^2 - 7^2) \\ &= \left(\frac{22}{7}\right)(196 - 49) \\ &= \left(\frac{22}{7}\right)(147) \\ &= 462 \text{ ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

พีทาโกรัส



ทฤษฎี: รูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก จะมีค่าเท่ากับผลรวมพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านเป็นด้านประชิดมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนั้น

$$c^2 = a^2 + b^2$$



ข้อควรรู้ เกี่ยวกับอัตราส่วนของสามเหลี่ยม

- ถ้า $c^2 = a^2 + b^2$ แล้ว $\triangle$ รูปนั้นเป็น $\triangle$ มุมฉาก
- ถ้า $c^2 > a^2 + b^2$ แล้ว $\triangle$ รูปนั้นเป็น $\triangle$ มุมป้าน
- ถ้า $c^2 < a^2 + b^2$ แล้ว $\triangle$ รูปนั้นเป็น $\triangle$ มุมแหลม

แบบฝึกหัด 2.4

รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาว 20 นิ้ว 21 นิ้ว และ 28 นิ้ว ตามลำดับ จงตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ หากไม่ใช่แล้วเป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

วิธีทำ

ตอบ

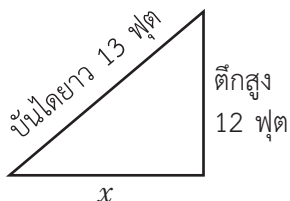
โจทย์ปัญหาพีทาโกรัส

- 1) อ่านโจทย์ให้ถี่ถ้วน แล้วนำข้อมูลจากโจทย์มาวาดเป็นรูปสามเหลี่ยม
- 2) หามุมฉากของรูปสามเหลี่ยมให้เจอ แล้วกำหนดค่าความยาวให้ถูกต้อง โดยด้านตรงข้ามมุมฉากต้องยาวที่สุด
- 3) ตั้งสมการพีทาโกรัส แล้วแก้สมการเพื่อหาตัวแปรที่โจทย์ต้องการ

แบบฝึกหัด 2.5

- 1) วางบันไดยาว 13 ฟุต พาดกับกำแพงตึกสูง 12 ฟุต จงหาว่าโคนบันไดอยู่ห่างจากฐานตึกเท่าไร

วิธีทำ



ตอบ

- 2) เราใช้ความยาวของเส้นทแยงมุมของหน้าจอตาร์ทอัพเพื่อบอกขนาดของโทรศัพท์ โดยโทรศัพท์เครื่องหนึ่งวัดตามแนวเส้นทแยงมุมได้ 17 นิ้ว ถ้าหน้าจอตาร์ทอัพสูง 8 นิ้ว จงหาว่าหน้าจอตาร์ทอัพนี้ยาวเท่าไร

วิธีทำ

ตอบ

3) เด็กคนหนึ่งสูง 6 ฟุต ยืนอยู่ห่างจากจุดปล่อยบอลสูง 400 ฟุต บอลกลิ้งลงขึ้นไปจากจุดปล่อย 306 ฟุต จงหาว่าศีรษะเด็กคนนั้นอยู่ห่างจากบอลสูงกี่ฟุต

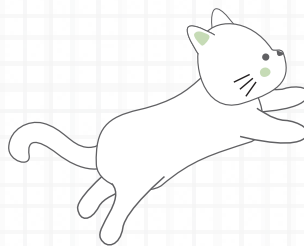
วิธีทำ

ตอบ

4) เสาดึงหนึ่งใช้เชือกผูกที่บนเสาดึงซึ่งห่างจากยอด 2 ฟุต แล้วดึงมาผูกที่หลักซึ่งอยู่ห่างโคนเสาดึง 15 ฟุต ถ้าเชือกยาว 25 ฟุต เสาดึงนี้สูงกี่ฟุต

วิธีทำ

ตอบ



O-net'51

เด็กคนหนึ่งเดินออกจากโรงเรียนไปทางทิศตะวันตก 7 เมตร เลี้ยวไปทางทิศเหนือ 20 เมตร แล้วต้องเลี้ยวไปทางทิศตะวันออกอีกกี่เมตร จึงจะถึงบ้านพอดี ถ้าบ้านและโรงเรียนอยู่ห่างกัน 25 เมตร

1. 15 เมตร
2. 22 เมตร
3. 27 เมตร
4. 29 เมตร

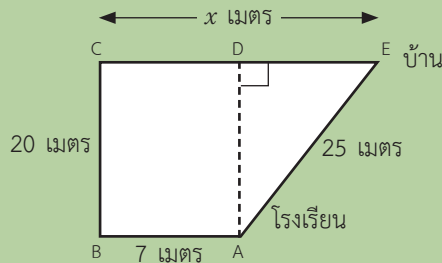


เฉลย

ตอบข้อ 2

แนวคิด

ลองวาดภาพตามโจทย์



พิจารณารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD จะได้

$\overline{AD} = 20$ เมตร และ $\overline{CD} = 7$ เมตร

หาค่า $\overline{DE}$ จากสูตรพีทาโกรัส จะได้ $\overline{DE} = 15$ เมตร

ดังนั้น $x = 7 + 15 = 22$ เมตร

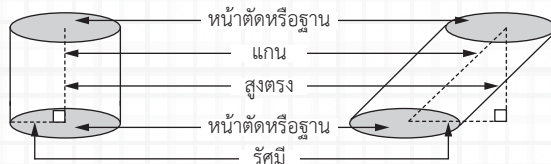
พื้นที่ผิวและปริมาตร ☆

ปริซึมและทรงกระบอก

พื้นที่ผิวข้าง: ความยาวรอบฐาน $\times$ สูง

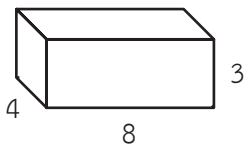
พื้นที่ผิว: พื้นที่ผิวข้าง + 2 (พื้นที่ฐาน)

ปริมาตร: พื้นที่ฐาน $\times$ สูง

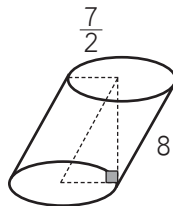


แบบฝึกหัด 2.6 จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตร

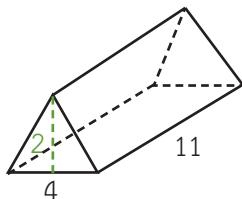
1)



2)



3)

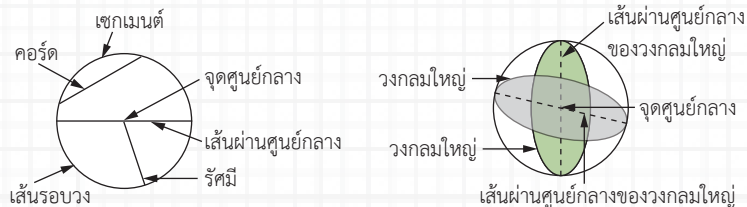


* เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ทรงกลม

พื้นที่ผิว: $4\pi r^2$

ปริมาตร: $\frac{4}{3}\pi r^3$

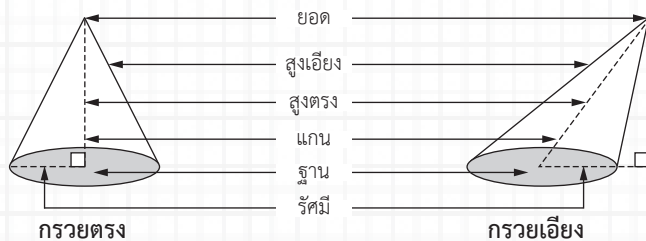


กรวย

พื้นที่ผิวข้าง: $\pi r l$

พื้นที่ผิว: $\pi r l + \pi r^2$
 $= \pi r(l + r)$

ปริมาตร: $\frac{1}{3}\pi r^2 h$



* l = สูงเอียงของกรวย, h = สูงตรงของกรวย

พีระมิด

พื้นที่ผิวข้าง 1 ด้าน: $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูงเอียง}$

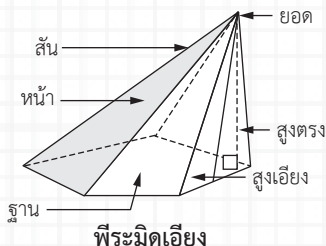
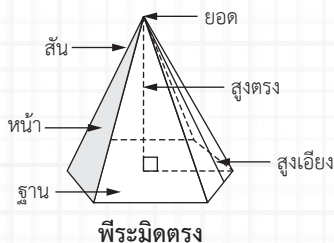
พื้นที่ผิว: พื้นที่ผิวข้างทุกด้าน + พื้นที่ฐาน

ปริมาตร: $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูงตรง}$

* กรณิพีระมิดตรงที่มีฐานเป็นรูปเหลี่ยม

ด้านเท่ามุมเท่า

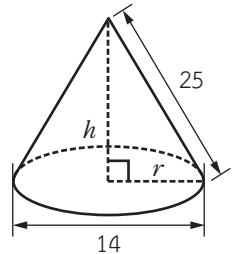
พื้นที่ผิวข้าง: $\frac{1}{2} \times \text{ความยาวรอบฐาน} \times \text{สูงเอียง}$



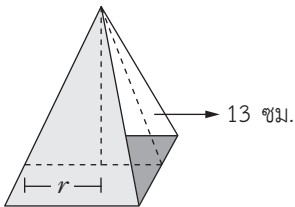
แบบฝึกหัด 2.7 จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตร

- 1) กรวยกลมอันหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานยาว 14 นิ้ว สูงเอียง 25 นิ้ว จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตร

วิธีทำ



ตอบ



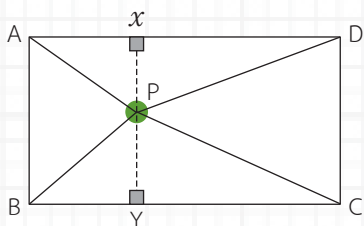
- 2) พีระมิตตรงฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีพื้นที่ฐาน 100 ตารางเซนติเมตร สูงเอียง 13 เซนติเมตร พีระมิตนี้จะมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

วิธีทำ

ตอบ

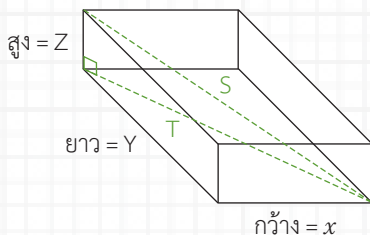
การนำทฤษฎีพีทาโกรัสมาประยุกต์ใช้กับเรขาคณิต

1) ระยะจากจุดยอดมุมไปยังจุดในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



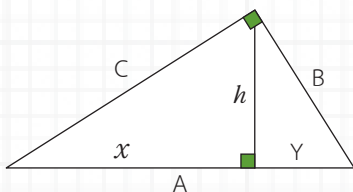
$$(BP)^2 + (DP)^2 = (AP)^2 + (CP)^2$$

2) เส้นทแยงมุมที่ยาวที่สุดในกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก



$$S = \sqrt{\text{กว้าง}^2 + \text{ยาว}^2 + \text{สูง}^2}$$

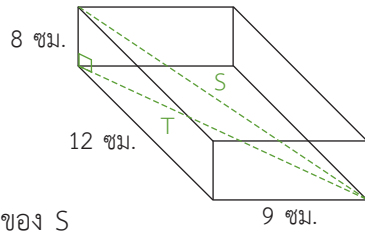
3) เส้นที่ลากมาตั้งฉากกับด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



$$h^2 = xY$$

แบบฝึกหัด 2.8

- 1) กล่องใบหนึ่งมีความกว้าง ความยาว และความสูงดังรูป

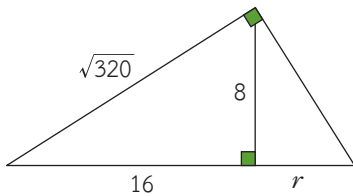


จงหาความยาวของ S

วิธีทำ

ตอบ

- 2) จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ จงหาความยาวของ r



วิธีทำ

ตอบ

พีระมิดตรงฐานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่ฐาน 36 ตารางเซนติเมตร สูงเอียง 5 เซนติเมตร
พีระมิดนี้จะมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

1. 144 ลูกบาศก์เซนติเมตร
2. 72 ลูกบาศก์เซนติเมตร
3. 60 ลูกบาศก์เซนติเมตร
4. 48 ลูกบาศก์เซนติเมตร



เฉลย

ตอบข้อ 4

แนวคิด

สูตรปริมาตรของพีระมิดคือ $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูงตรง}$

ดังนั้น ต้องหาสูงตรงจากสูตรพีทาโกรัส

จะได้ $5^2 = r^2 + \text{สูงตรง}^2$

หาค่า r จากสูตรพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส

จะได้ $36 = \text{ด้าน} \times \text{ด้าน}$

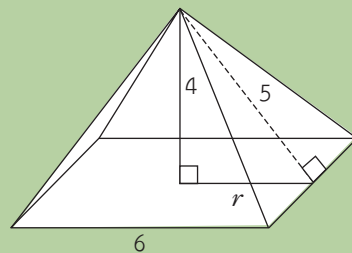
$36 = \text{ด้าน}^2$

ด้าน = 6

ดังนั้น ค่า $r = 3$

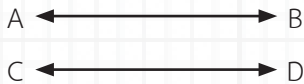
นำค่า r ไปหาสูงตรง จะได้สูงตรง = 4

จากนั้นหาปริมาตรจะได้เท่ากับ 48 ลูกบาศก์เซนติเมตร



เส้นขนาน ☆

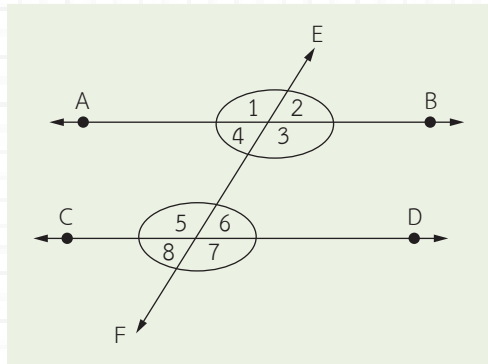
นิยาม เส้นตรง 2 เส้นอยู่บนระนาบเดียวกันที่ขนานกัน โดยระยะห่างระหว่าง 2 เส้นเท่ากัน เสมอและไม่มีทางตัดกันได้ ใช้สัญลักษณ์ “//” แทนเส้นขนาน



เส้นตรง AB ขนานกับเส้นตรง CD

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

การเรียกชื่อมุมที่เกิดจากเส้นตัดกับเส้นขนานและทฤษฎีต่าง ๆ



การเรียกชื่อมุม

- ➔ มุมแย้ง: 3 แแย้งกับ 5, 4 แแย้งกับ 6
- ➔ มุมตรงข้าม: 1 ตรงข้าม 3, 2 ตรงข้าม 4, 5 ตรงข้าม 7, 6 ตรงข้าม 8
- ➔ มุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด $\overleftrightarrow{EF}$: 3 กับ 6 และ 4 กับ 5
- ➔ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด $\overleftrightarrow{EF}$: 1 และ 5, 4 และ 8, 2 และ 6, 3 และ 7

KEEP
READING

VERY
IMPORTANT

ทฤษฎีบท

- 1) ถ้าเส้นตรง 2 เส้นขนานกันและมีเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งมาตัดแล้ว ขนาดของมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180°

$$\text{ผลที่ได้: } \hat{4} + \hat{5} = 180^\circ, \hat{3} + \hat{6} = 180^\circ$$

- 2) ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง แล้วทำให้ขนาดของมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180° แล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน (บทกลับ 1)

$$\text{ผลที่ได้: } \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$$

- 3) ถ้าเส้นตรง 2 เส้นขนานกัน และมีเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งมาตัดแล้ว ขนาดของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดจะมีขนาดเท่ากัน

$$\text{ผลที่ได้: } \hat{1} = \hat{5}, \hat{4} = \hat{8}, \hat{2} = \hat{6}, \hat{3} = \hat{7}$$

- 4) ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง แล้วทำให้ขนาดของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน (บทกลับ 3)

$$\text{ผลที่ได้: } \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$$

- 5) ถ้าเส้นตรง 2 เส้นขนานกัน และมีเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งมาตัดแล้ว มุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน

$$\text{ผลที่ได้: } \hat{3} = \hat{5}, \hat{4} = \hat{6}$$

- 6) ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง แล้วทำให้ขนาดของมุมแย้งเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน (บทกลับ 5)

$$\text{ผลที่ได้: } \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$$



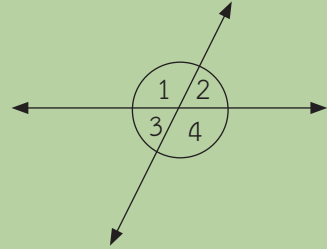
ข้อควรรู้

ถ้าเส้นตรง 2 เส้นตัดกันแล้ว

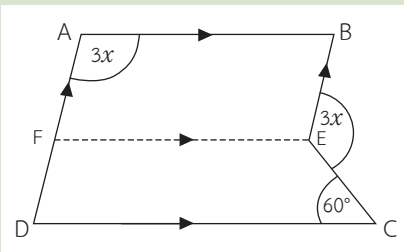
มุมตรงข้ามจะมีขนาดเท่ากันเสมอ

$$\hat{1} = \hat{4}$$

$$\hat{2} = \hat{3}$$



O-net'58



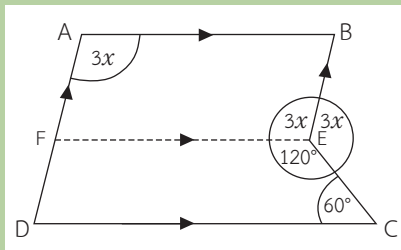
จากรูป ให้ $\overline{AD}$ ขนานกับ $\overline{BE}$ และ $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{DC}$ ขนาดของมุม BAD และ BEC เท่ากับ $3x$ ขนาดของมุม DCE เท่ากับ 60° จงหาขนาดของมุม BAD

1. 105 องศา
2. 110 องศา
3. 115 องศา
4. 120 องศา



เฉลย

ตอบข้อ 4



แนวคิด

$\overline{FE} \parallel \overline{DC}$ ดังนั้น ตามทฤษฎีเส้นขนานข้อที่ 1

จะได้ $\angle FÊC = 120^\circ$

$\square ABEF$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนั้น $\angle FÊB = \angle FÂB = 3x$

$$\angle FÊB + \angle BÊC + \angle FÊC = 360^\circ$$

$$3x + 3x + 120^\circ = 360^\circ$$

$$6x = 240^\circ$$

$$x = 40^\circ$$

$$\therefore 3x = 120^\circ$$

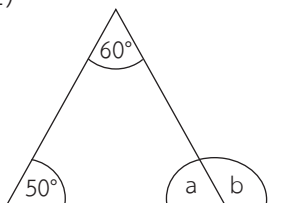
รูปสามเหลี่ยม (triangle) ★

สมบัติของรูปสามเหลี่ยม

- 1) มุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 2 มุมฉาก หรือ 180°
- 2) ถ้าต่อเส้นด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกบนด้านหนึ่งของรูป จะมีขนาดเท่ากับผลรวมของมุมที่ไม่ใช่มุมประชิดกับมุมภายนอก
- 3) เส้นตรงที่ลากผ่านจุดกึ่งกลางของด้านสองด้าน ย่อมขนานกับด้านที่เหลือเสมอ โดยจะมีความยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่เหลือ
- 4) เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังจุดกึ่งกลางของฐานที่อยู่ตรงข้ามกับจุดนั้น ๆ เรียกว่า “เส้นมัธยฐาน (median)” ย่อมตัดกันที่ “จุดเซนทรอยด์ (centroid)” โดยระยะทางจากจุดเซนทรอยด์ถึงจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมจะเท่ากับสองเท่าของระยะทางจากจุดเซนทรอยด์ถึงกึ่งกลางฐานแต่ละด้านเสมอ

แบบฝึกหัด 2.9

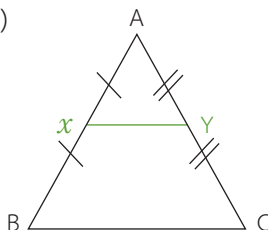
1)



$a = \underline{\hspace{2cm}}$

$b = \underline{\hspace{2cm}}$

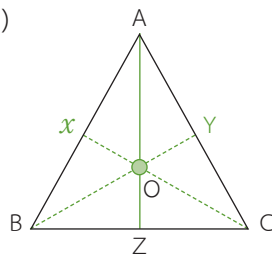
2)



เมื่อ X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ ให้ความยาว $\overline{XY} = 6$ ซม.

ความยาว $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ซม.

3)



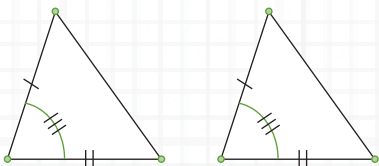
เมื่อ X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ ตามลำดับ และ O เป็นจุดเซนทรอยด์ เส้นมัธยฐาน ได้แก่ $\underline{\hspace{2cm}}$ ให้ความยาว $\overline{OZ} = 5$ ซม. ความยาว $\overline{AO} = \underline{\hspace{2cm}}$ ซม.

รูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ ☆

ความเท่ากันทุกประการ

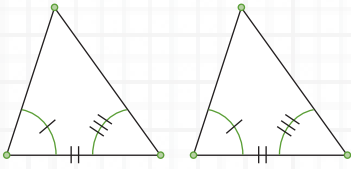
ความเท่ากัน ทุกประการ	รูปสองรูปเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อ รูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี	สัญลักษณ์ $A \cong B$
ส่วนของเส้นตรง เท่ากันทุกประการ	ส่วนของเส้นตรงสองเส้นจะเท่ากัน ทุกประการได้ก็ต่อเมื่อส่วนของเส้นตรง สองเส้นนั้นยาวเท่ากัน	สัญลักษณ์ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$ $\overline{AB} = \overline{CD}$ (นิยม)
มุมเท่ากัน ทุกประการ	มุมสองมุมจะเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อมุมทั้งสองมีขนาดเท่ากัน	สัญลักษณ์ $\hat{A} \cong \hat{B}$ $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$ $\hat{A} = \hat{B}$ (นิยม)
รูปสามเหลี่ยมเท่ากัน ทุกประการ	รูปสามเหลี่ยมสองรูปจะเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยม ทั้งสองมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ ซึ่งมี รูปแบบความสัมพันธ์ที่หลากหลาย	สัญลักษณ์ $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$

ความสัมพันธ์รูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ



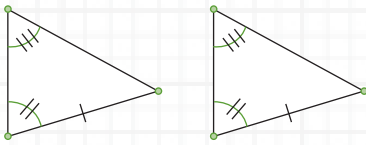
ด้าน - มุม - ด้าน (ด.ม.ด.)

สามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านเท่ากันสองคู่
และขนาดของมุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่ากันแล้ว
รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



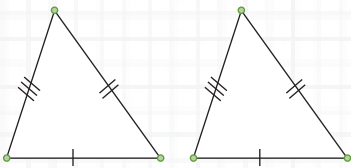
มุม - ด้าน - มุม (ม.ด.ม.)

สามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ ที่มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และมีด้านที่เป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



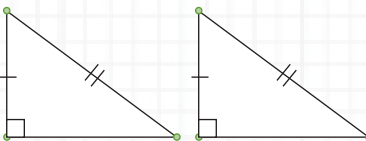
มุม - มุม - ด้าน (ม.ม.ด.)

สามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ ที่มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านยาวเท่ากันหนึ่งคู่ รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



ด้าน - ด้าน - ด้าน (ด.ด.ด.)

สามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ จะเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน ก็ต่อเมื่อสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีความยาวด้านเท่ากันสามคู่



ฉาก - ด้าน - ด้าน (ฉ.ด.ด.)

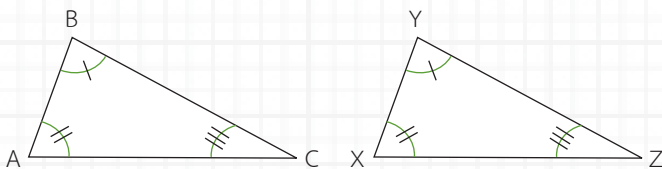
สามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปใด ๆ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

รูปสามเหลี่ยมคล้าย (similar triangle) ☆

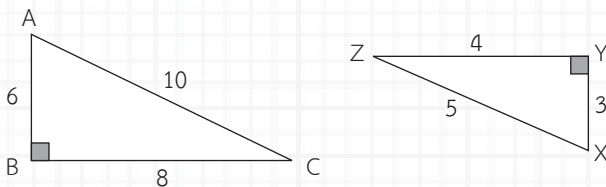
นิยาม รูปสามเหลี่ยมคล้าย คือรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่ ใช้สัญลักษณ์ “ $\sim$ ” แทนความคล้าย

การพิจารณารูปสามเหลี่ยมคล้าย

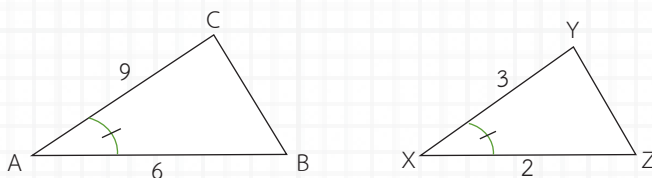
- 1) เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากันสามคู่



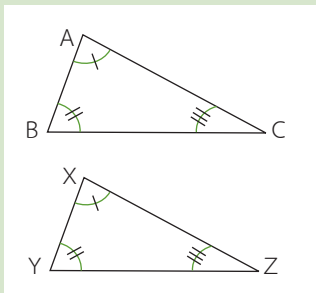
- 2) เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีอัตราส่วนความยาวของด้านเท่ากันสามคู่



- 3) เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีอัตราส่วนความยาวของด้านเท่ากันสองคู่ และมีขนาดของมุมที่อยู่ระหว่างอัตราส่วนความยาวของด้านเท่ากัน



หลักการ



ด้านตรงข้ามมุมที่เท่ากันเป็น “ด้านสมนัย” กัน

เช่น $\hat{A} = \hat{X}$ มีด้านตรงข้ามมุมที่เท่ากัน คือ $\overline{BC}$ และ $\overline{YZ}$

ดังนั้น $\overline{BC}$ สมนัยกับ $\overline{YZ}$

อัตราส่วนของความยาวด้านคู่สมนัยกัน
ต้องมีค่าเท่ากันทุกด้านในรูปสามเหลี่ยมคล้าย

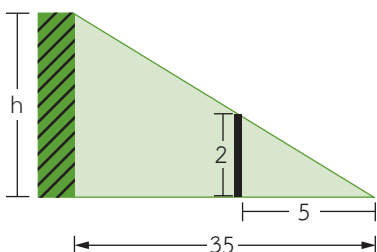
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{YZ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{XY}} \quad \text{หรือ} \quad \frac{\overline{YZ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{XZ}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{AB}}$$

วิธีทำโจทย์รูปสามเหลี่ยมคล้าย

- 1) อ่านโจทย์ให้ดี แล้วนำข้อมูลจากโจทย์มาวาดเป็นรูปสามเหลี่ยม
- 2) หาด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปให้ถูกต้อง
- 3) ตั้งสมการอัตราส่วนของความยาวด้านคู่สมนัยกัน
- 4) หาคำตอบที่โจทย์ต้องการหา

แบบฝึกหัด 2.10

- 1) ชายคนหนึ่งเห็นเงาของตึกทอดยาวไป 35 เมตร ขณะที่เสาต้นหนึ่งสูง 2 เมตร ทอดเงาไปทางเดียวกันยาว 5 เมตร อยากทราบว่าตึกสูงเท่าใด



วิธีทำ กำหนดให้ ความสูงของตึก = h เมตร

ตอบ

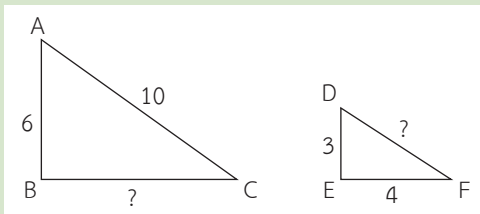
2) นายภูมิสูง 6 ฟุต ยืนห่างจากเสาไฟฟ้า 28 ฟุต ถ้าเสาไฟฟ้าสูง 30 ฟุต จงหาความยาวของเงาของนายภูมิคนนี้อายุเท่าใด

วิธีทำ

ตอบ

O-net'58

กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน และ $\overline{AB} = 6$ นิ้ว $\overline{AC} = 10$ นิ้ว $\overline{DE} = 3$ นิ้ว $\overline{EF} = 4$ นิ้ว แล้ว จะได้



ก. $\overline{BC} = 8$ นิ้ว

ข. $\overline{DF} = 6$ นิ้ว

ข้อใดสรุปได้ถูกต้อง

1. ข้อ ก ถูก ข้อ ข ถูก
2. ข้อ ก ถูก ข้อ ข ผิด
3. ข้อ ก ผิด ข้อ ข ถูก
4. ข้อ ก ผิด ข้อ ข ผิด



แนวคิด

แนวคิด เนื่องจาก $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน ดังนั้น จะต้องมียัตราส่วนความยาวของด้านเท่ากัน 3 คู่

อัตราส่วนความยาวของด้าน พิจารณาได้จาก $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{6}{3} = 2$

ดังนั้น $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{10}{\overline{DF}} = 2$ จะได้ $\overline{DF} = 5$ นิ้ว

ดังนั้น $\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{4} = 2$ จะได้ $\overline{BC} = 8$ นิ้ว

เฉลย

ตอบข้อ 2

สูตรสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

- 1) สูตรของเพลโต (Plato) กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 1 ($n \geq 2$) โดยด้าน a, b และ c มีค่า $2n, n^2-1$ และ n^2+1 ตามลำดับ
- 2) สูตรของพีทาโกรัส (Pythagoras) กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 1 ($n \geq 2$) โดยด้าน a, b และ c มีค่า $n, \frac{n^2-1}{2}$ และ $\frac{n^2+1}{2}$ ตามลำดับ

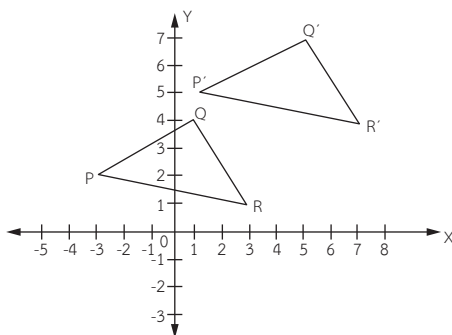
การแปลงทางเรขาคณิต ★

1. การเลื่อนขนาน

การเลื่อนขนานบนระนาบเป็นการแปลงทางเรขาคณิตโดยการ “เลื่อนจุดทุกจุด” ไปบนระนาบตามแนวเส้นตรง “ในทิศทางเดียวกัน” และเป็น “ระยะทางเท่ากัน” ตามที่กำหนด

สมบัติของการเลื่อนขนาน

- 1) รูปที่ได้จากการเลื่อนขนานกับรูปต้นแบบเท่ากันทุกประการ
- 2) จุดแต่ละจุดที่สมนัยกันบนรูปที่ได้จากการเลื่อนขนานกับรูปต้นแบบจะมีระยะทางเท่ากัน
- 3) ภายใต้การเลื่อนขนาน จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างและขนาดของรูปต้นแบบ



2. การสะท้อน

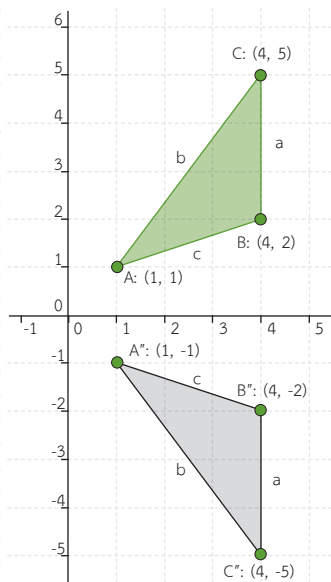
เป็นการ “เลื่อนจุดทุกจุด” ของรูปต้นแบบ “เคลื่อนที่ข้ามเส้นตรงเส้นหนึ่ง” ซึ่งเปรียบเหมือนกระจก หรือเรียกว่า “เส้นสะท้อน” โดยที่เส้นนี้จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบกับจุดแต่ละจุดบนรูปสะท้อนที่สมนัยกัน

สมบัติของการสะท้อน

- 1) รูปที่เกิดจากการสะท้อนมีขนาดและรูปร่างเท่ากับรูปต้นแบบ หรือเท่ากันทุกประการกับรูปต้นแบบ
- 2) รูปที่เกิดจากการสะท้อนกับรูปต้นแบบห่างจากเส้นสะท้อนเท่ากัน
- 3) จุดบนเส้นสะท้อนเป็นจุดคงที่ ไม่มีการสะท้อน

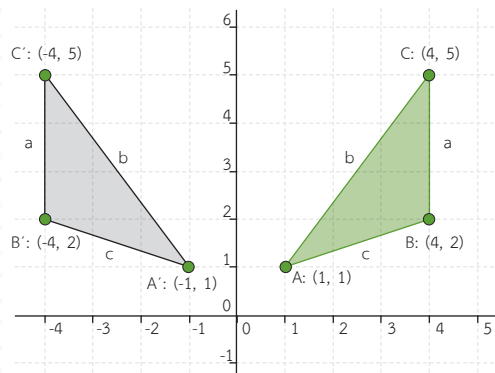
การสะท้อนข้ามแกน X

หมายถึง การสะท้อนจุดข้ามแกน X จะใช้ค่าพิกัด X เดิม และคูณค่าพิกัด Y ด้วย -1 หรือจาก (x, y) กลายเป็น $(x, -y)$



การสะท้อนข้ามแกน Y

หมายถึง การสะท้อนจุดข้ามแกน Y จะคูณค่าพิกัด X ด้วย -1 และใช้ค่าพิกัด Y เดิม หรือจาก (x, y) กลายเป็น $(-x, y)$



3. การหมุน

เป็นการ “เลื่อนจุดทุกจุด” ของรูปต้นแบบ “เคลื่อนที่ไปเป็นมุมเดียวกันรอบจุดคงที่หรือจุดหมุน” การหมุนจะหมุนทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกา ตามขนาดของมุมและทิศทางที่ต้องการหมุน โดยทั่วไปถ้าไม่ระบุทิศทางการหมุนจะถือว่าเป็นการหมุนทวนเข็มนาฬิกา การหมุนเป็นการแปลงที่เกิดจากการจับคู่ของจุดแต่ละคู่ระหว่างรูปต้นแบบกับรูปที่ได้จากการหมุน

สมบัติของการหมุน

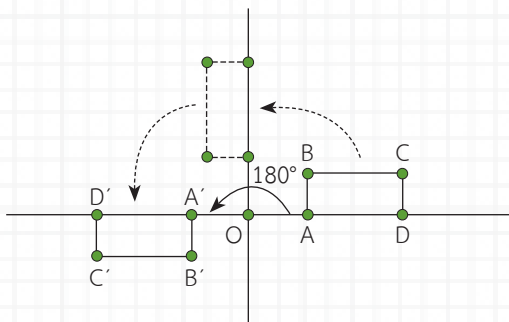
- 1) รูปที่ได้จากการหมุนกับรูปต้นแบบเท่ากันทุกประการ
- 2) จุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบเคลื่อนที่รอบจุดหมุนด้วยขนาดของมุมที่กำหนด
- 3) จุดหมุนเป็นจุดคงที่

การหมุน 90° ทวนเข็มนาฬิกา

หมายถึง การหมุนรูปทวนเข็มนาฬิกาไป 90° สลับค่าพิกัดแต่ละจุด แล้วคูณค่าพิกัดแรกด้วย -1 หรือจาก $A(x, y) \rightarrow A'(-y, x)$

การหมุน 180°

หมายถึง การหมุนไป 180° แล้วคูณค่าพิกัดทั้งสองของแต่ละจุดด้วย -1 หรือจาก $A(x, y) \rightarrow A'(-x, -y)$



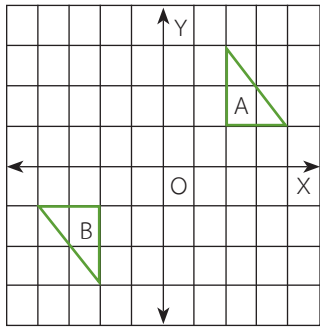
แบบฝึกหัด 2.11

1) จงบอกว่าแต่ละข้อเป็นการเลื่อนขนาน การสะท้อน หรือการหมุน

- | | |
|-------|-------------------------|
| _____ | ชิงช้าสวรรค์ |
| _____ | เข็มนาฬิกาที่กำลังเดิน |
| _____ | รถไฟที่แล่นตรงไป |
| _____ | เงาของต้นไม้ในลำธาร |
| _____ | ลูกบอลกำลังกลิ้งไป |
| _____ | ใบพัดของพัดลมกำลังทำงาน |
| _____ | ยกเก้าอี้ขึ้นวางบนโต๊ะ |
| _____ | การเปิดหน้าต่าง |

2) เมื่อสะท้อนจุด $(6, -9)$ กับแกน x จะได้จุดใด _____

3) เลื่อนจุด $(-8, 3)$ ขึ้นบน 4 หน่วย จะเป็นจุดใด _____



ให้รูป A เป็นรูปต้นแบบ
การแปลงในข้อต่อไปนี้จะทำให้เกิดภาพ B

1. หมุนรูปต้นแบบรอบจุด O ในทิศทวนเข็มนาฬิกา 180 องศา
2. สะท้อนรูปต้นแบบโดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน แล้วสะท้อนภาพที่ได้โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน
3. สะท้อนรูปต้นแบบโดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน แล้วสะท้อนภาพที่ได้โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน
4. เลื่อนรูปต้นแบบขนานแกน X ไปทางซ้าย 6 หน่วย แล้วสะท้อนภาพที่ได้ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

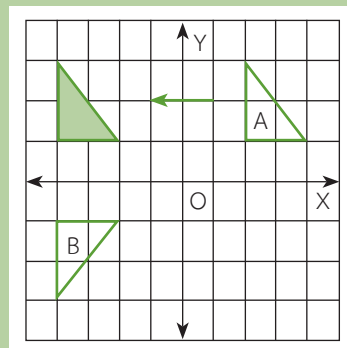


เฉลย

ตอบข้อ 4

แนวคิด

หากทำตาม 4. เลื่อนรูปต้นแบบขนานแกน X ไปทางซ้าย 6 หน่วย แล้วสะท้อนภาพที่ได้ โดยมีแกน X เป็นแกนสะท้อน จะได้ดังภาพ ซึ่งเป็นคำตอบที่ผิด

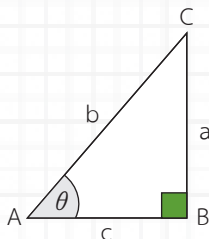


อัตราส่วนตรีโกณมิติ ★

คืออัตราส่วนของความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

การเรียกด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

**การเรียกด้านขึ้นอยู่กับว่าเราสนใจมุมไหน ในกรณีนี้มุมที่สนใจคือมุม A



ด้าน $BC = \overline{BC} = a$ = ด้านตรงข้ามมุม θ = ข้าม

ด้าน $AC = \overline{AC} = b$ = ด้านตรงข้ามมุมฉาก = ฉาก

ด้าน $AB = \overline{AB} = c$ = ด้านประชิดมุม θ = ชิด

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

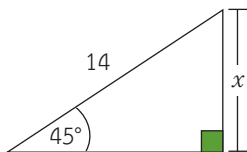
อัตราส่วนตรีโกณมิติ	ความหมาย	หมายเหตุ
$\sin \theta$	$\frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$	ส่วนกลับของ $\operatorname{cosec} \theta$
$\cos \theta$	$\frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$	ส่วนกลับของ $\sec \theta$
$\tan \theta$	$\frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$	ส่วนกลับของ $\cot \theta$
$\operatorname{cosec} \theta$	$\frac{\text{ฉาก}}{\text{ข้าม}}$	ส่วนกลับของ $\sin \theta$
$\sec \theta$	$\frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}}$	ส่วนกลับของ $\cos \theta$
$\cot \theta$	$\frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}}$	ส่วนกลับของ $\tan \theta$

ตารางแสดงอัตราส่วนตรีโกณมิติที่พบบ่อย

ค่ามุม θ	0°	30°	37°	45°	53°	60°	90°	180°	270°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
cosec	∞	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	∞	-1
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{5}{3}$	2	∞	-1	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0

แบบฝึกหัด 2.12

จงหาค่า x

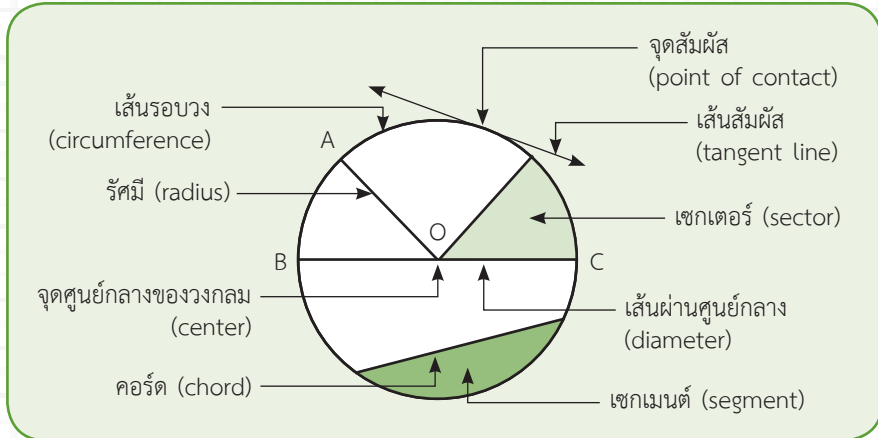


วิธีทำ

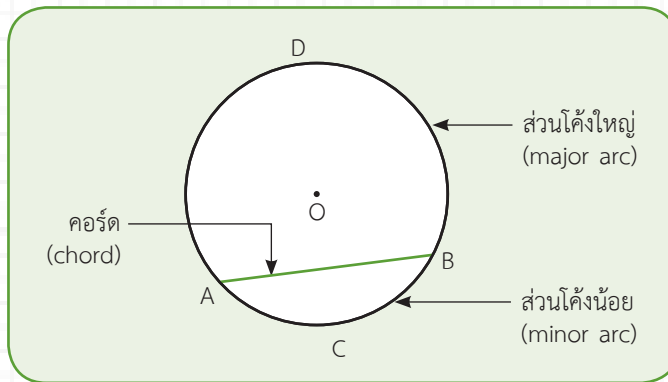
ตอบ

รูปร่างกลม ★

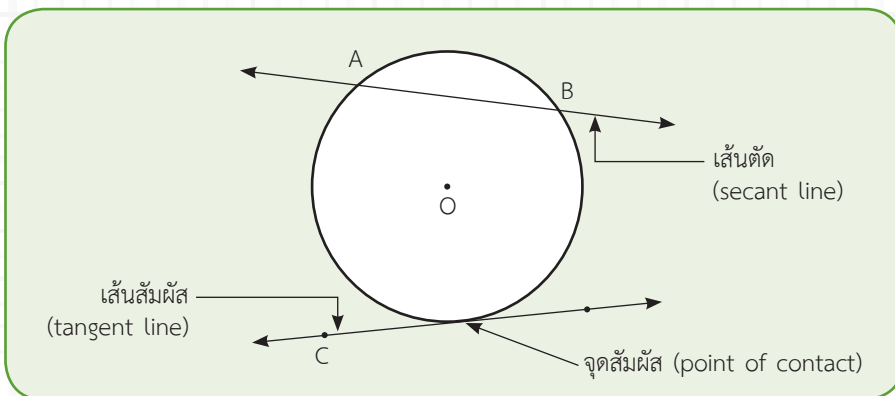
ส่วนต่างๆ ของรูปร่างกลม



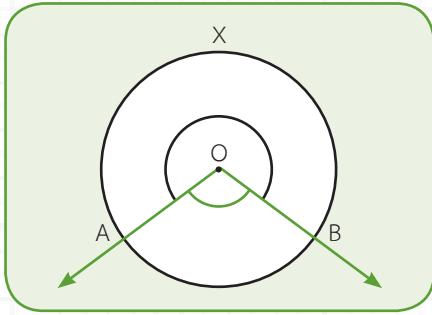
- 1) **วงกลม (circle)** คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกันเป็นระยะทางเท่าๆ กัน
- 2) **เส้นรอบวง (circumference)** คือเซตของจุดที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะทางเท่ากัน
- 3) **จุดศูนย์กลางของวงกลม (center)** คือจุดที่อยู่ตรงกลางวงกลมพอดี และห่างจากเส้นรอบวงเท่ากันโดยตลอด
- 4) **รัศมี (radius)** คือระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังเส้นรอบวง
 - * วงกลมวงหนึ่งมีรัศมีมากมายนับไม่ถ้วน และรัศมีของวงกลมเดียวกันจะยาวเท่ากันทุกเส้น
 - * วงกลม 2 วงที่มีรัศมียาวเท่ากันสามารถเลื่อนให้วงกลม 2 วงนั้นทับกันได้สนิท จึงกล่าวได้ว่าวงกลม 2 วงที่มีรัศมียาวเท่ากันจะเท่ากันทุกประการ
- 5) **เส้นผ่านศูนย์กลาง (diameter)** คือเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมโดยที่ปลายทั้งสองจรดเส้นรอบวงพอดี และมีระยะทางเป็นสองเท่าของรัศมีเสมอ
- 6) **คอร์ด (chord)** คือส่วนของเส้นตรงที่มีปลายทั้ง 2 ข้างอยู่บนวงกลมเดียวกัน ทำหน้าที่แบ่งวงกลมออกเป็น 2 ส่วน และคอร์ดที่ยาวที่สุดคือเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม
- 7) **เซกเมนต์ (segment)** คือพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยคอร์ดกับส่วนโค้งของวงกลมเดียวกัน
- 8) **เซกเตอร์ (sector)** คือพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยรัศมีกับส่วนโค้งของวงกลม



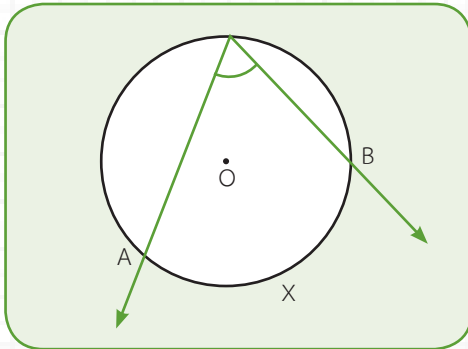
- 9) ส่วนโค้ง (arc) • ส่วนโค้งใหญ่ (major arc) คือส่วนของเส้นรอบวงที่ยาวกว่า
 • ส่วนโค้งน้อย (minor arc) คือส่วนของเส้นรอบวงที่สั้นกว่า



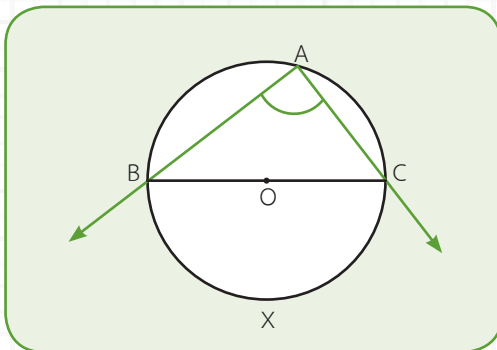
- 10) เส้นสัมผัส (tangent line) คือเส้นตรงที่ตัดกับวงกลมเพียงจุดเดียว เรียกจุดที่เส้นสัมผัสสัมผัสกับวงกลมว่า “จุดสัมผัส” และรัศมีที่เกิดจากจุดสัมผัสจะทำมุมฉากกับเส้นสัมผัส
- 11) เส้นตัด (secant line) คือเส้นตรงที่ตัดวงกลมสองจุด



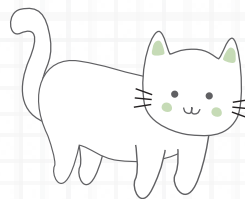
- 12) มุมที่จุดศูนย์กลาง คือมุมที่มีจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดยอดมุมและแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม



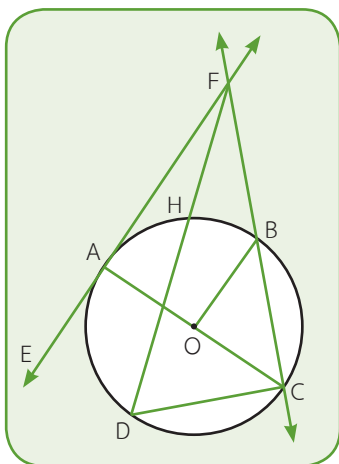
- 13) มุมในส่วนโค้งของวงกลม คือมุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม



- 14) มุมในครึ่งวงกลม คือมุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นหนึ่ง



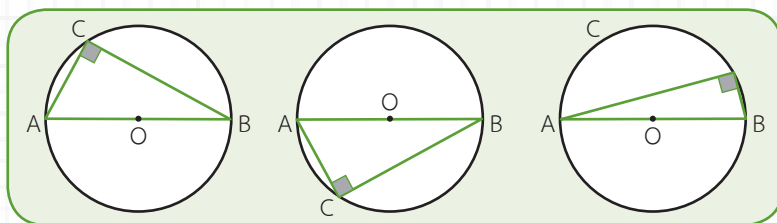
แบบฝึกหัด 2.13 จากรูป จงบอกชื่อส่วนต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับวงกลม O ดังนี้



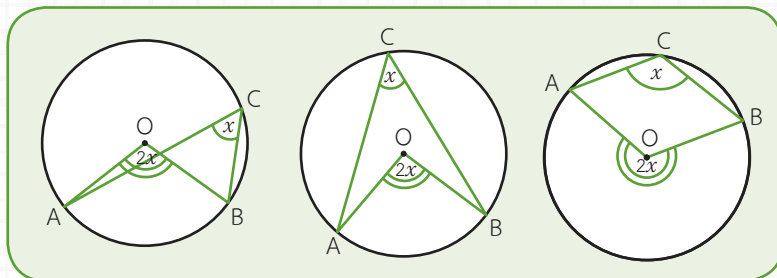
- 1) เส้นผ่านศูนย์กลาง คือ _____
- 2) รัศมี คือ _____
- 3) คอร์ด คือ _____
- 4) คอร์ดที่ยาวที่สุด คือ _____
- 5) เส้นสัมผัสวงกลม คือ _____
- 6) เส้นตัดวงกลม คือ _____
- 7) ส่วนโค้งที่เป็นครึ่งวงกลม คือ _____

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลม

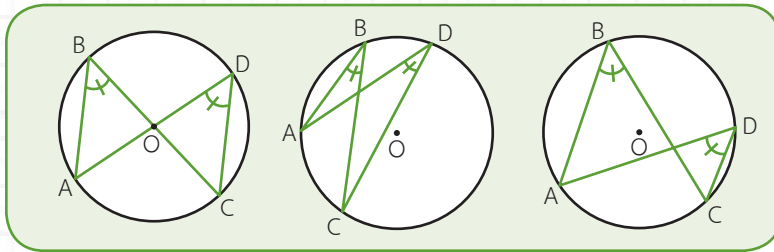
ทฤษฎีบทที่ 1 มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90° หรือหนึ่งมุมฉาก



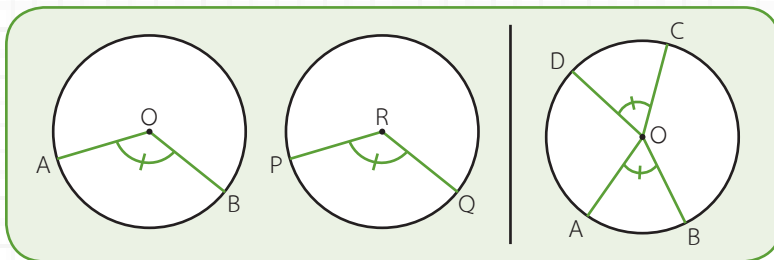
ทฤษฎีบทที่ 2 ในวงกลมเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



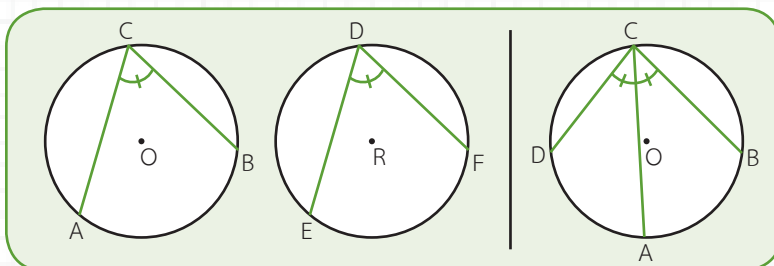
ทฤษฎีบทที่ 3 ในวงกลมเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน



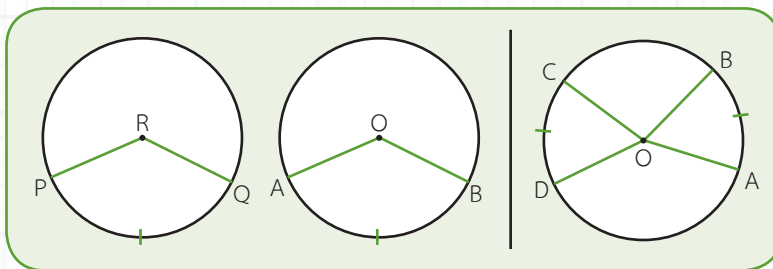
ทฤษฎีบทที่ 4 ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน



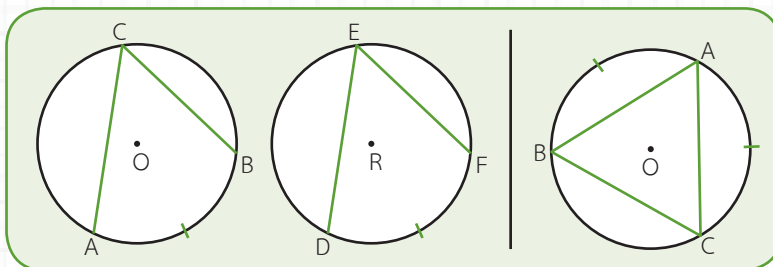
ทฤษฎีบทที่ 5 ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน



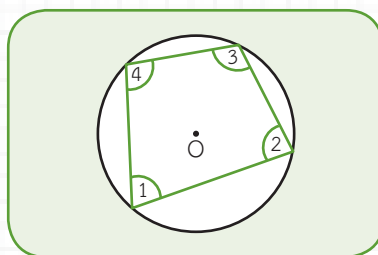
ทฤษฎีบทที่ 6 ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน



ทฤษฎีบทที่ 7 ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน



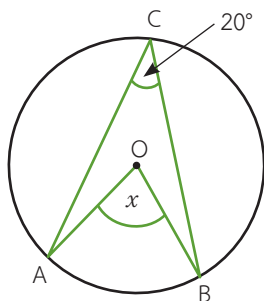
ทฤษฎีบทที่ 8 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ มีผลบวกของขนาดมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมนี้จะแนบในวงกลมได้



แบบฝึกหัด 2.14

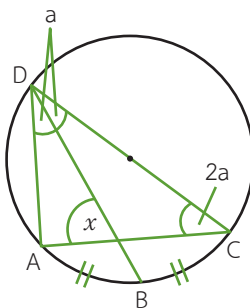
- 1) จากรูป จงหาค่า x โดยกำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

วิธีทำ



ตอบ

- 2) กำหนดให้ CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และ B เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AC ถ้า $\angle ACD = 2\angle BDC$ จงหาค่า x

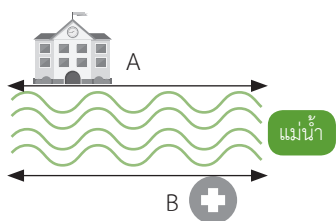


วิธีทำ

ตอบ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

- 1) โรงเรียนและโรงพยาบาลตั้งอยู่คนละฟากของริมฝั่งแม่น้ำซึ่งขนานกันที่จุด A และ B ตามลำดับ จากแผนภาพ ต้องการสร้างสะพานข้ามแม่น้ำ โดยให้แนวสะพานตั้งฉากกับริมฝั่งแม่น้ำทั้งสอง และอยู่ห่างจากโรงเรียนและโรงพยาบาลเป็นระยะทางเท่ากัน จงหาตำแหน่งที่จะสร้างสะพานดังกล่าว



วิธีทำ

ตอบ

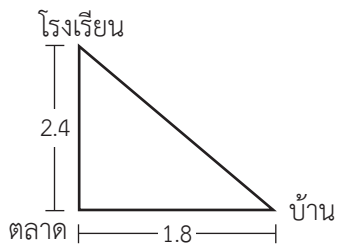
- 2) รูป $\triangle ABC$ มีมุม A เป็น 6 เท่าของมุม C และ 2 เท่าของมุม B ใหญ่กว่า 2 เท่าของมุม B อยู่ 30° อยากทราบว่ามุม A กางกี่องศา

วิธีทำ

ตอบ

- 3) จากแผนผังกำหนดตำแหน่งที่ตั้งบ้านของแสงดาว ตลาด และโรงเรียน เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ตลาดอยู่ห่างจากบ้านของแสงดาว 1.8 กิโลเมตร และอยู่ห่างจากโรงเรียน 2.4 กิโลเมตร ทุก ๆ วันหลังเลิกเรียน แสงดาวจะต้องขี่จักรยานแวะไปซื้อข้าวที่ตลาดก่อนกลับบ้าน แต่ในตอนเช้าแสงดาวจะขี่จักรยานตรงไปโรงเรียน โดยไม่ผ่านตลาด จงหาว่าในแต่ละวันแสงดาวขี่จักรยานเป็นระยะทางกี่กิโลเมตร

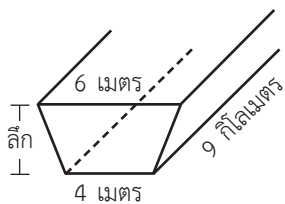
วิธีทำ



ตอบ

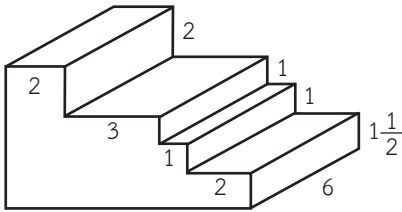
- 4) คลองประปาที่มีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป การสร้างคลองประปายาว 9 กิโลเมตรจะต้องขุดดินออกไปคิดเป็นปริมาตร 157,500 ลูกบาศก์เมตร คลองประปามีความลึกกี่เมตร

วิธีทำ



ตอบ

5)



จงหาปริมาตรของรูปนี้

วิธีทำ

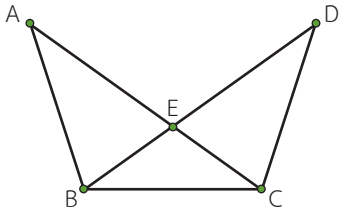
ตอบ

6) จงหาค่าและปริมาตรของทรงกลมซึ่งมีพื้นที่ผิว 144π ตารางเซนติเมตร (กำหนดให้ $\pi = \frac{22}{7}$)

วิธีทำ

ตอบ

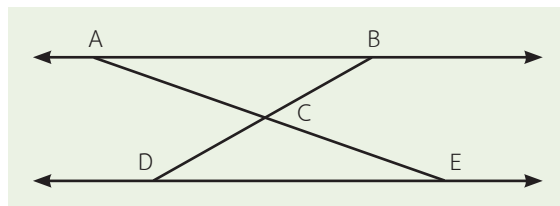
7)



กำหนดให้ $\overline{AC} = \overline{DB}$, มุม $BAE =$ มุม CDE , $\overline{AB} = \overline{DC}$,
จงพิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยม BEC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ลำดับที่	ข้อความ	เหตุผล
1	$\overline{AC} = \overline{DB}$	
2	มุม $BAE =$ มุม CDE	
3	$\overline{AB} = \overline{DC}$	
4	$\triangle ABC = \triangle DCB$	
5	มุม $ACB =$ มุม DBC	
6	$\triangle BEC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	

8) จากรูป รูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปคล้ายกันหรือไม่ และบอกมุมคู่ที่เท่ากัน โดยกำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$



วิธีทำ

ตอบ

9) จุดยอดของรูป $\triangle PQR$ คือ $P(-3, 2)$ $Q(1, 4)$ และ $R(3, 1)$ จงสร้างรูป $\triangle PQR$ แล้ววาดรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการเลื่อนขนานไปทางขวา 4 หน่วย และขึ้นบน 3 หน่วย

วิธีทำ

ตอบ

10) จงตอบคำถามต่อไปนี้

10.1) จงหาค่าของ $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ \tan 30^\circ$

วิธีทำ

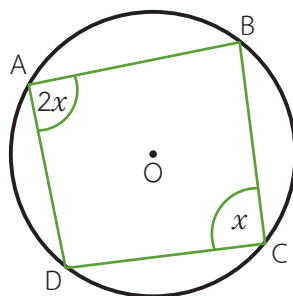
ตอบ

10.2) จงหาค่าของ x จากสมการ $x \sin 30^\circ \cos 60^\circ = 6$

วิธีทำ

ตอบ

11) จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาค่า x



วิธีทำ

ตอบ

สถิติมีความหมายกว้าง ๆ 2 ประการดังนี้

รูปแบบที่ 1 หมายถึง ตัวเลขหรือข้อความที่ใช้แสดงข้อเท็จจริงของสิ่งที่สนใจศึกษา โดยการรวบรวมข้อเท็จจริงต่าง ๆ ซึ่งควรมีตัวเลขเป็นจำนวนมาก เพื่อที่จะแสดงถึงลักษณะสำคัญของข้อเท็จจริง และบอกความสัมพันธ์จากตัวเลขหรือข้อความเหล่านั้นได้

รูปแบบที่ 2 หมายถึง ศาสตร์ที่เป็นทั้งวิทยาศาสตร์และศิลปศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับระเบียบและวิธีการสถิติโดยแบ่งออกเป็น 4 ขั้นตอนดังนี้

- 1) การเก็บรวบรวมข้อมูล
- 2) การนำเสนอข้อมูล
- 3) การวิเคราะห์ข้อมูล
- 4) การตีความหมายข้อมูล

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสถิติที่ควรทราบ

ข้อมูล (data) ข้อเท็จจริงหรือสิ่งที่ยอมรับว่าเป็นข้อเท็จจริงของเรื่องที่สนใจศึกษา เราแบ่งข้อมูลออกได้หลายประเภท โดยจำแนกตามลักษณะที่ใช้ในการพิจารณาดังนี้

จำแนกตามลักษณะของข้อมูล แบ่งออกเป็น 2 ประเภทได้แก่

1. ข้อมูลเชิงคุณภาพ (qualitative data) เป็นข้อมูลที่อธิบายลักษณะหรือสมบัติเชิงคุณภาพ ซึ่งไม่สามารถวัดค่าออกมาเป็นตัวเลขและสื่อความหมายตามค่าตัวเลขได้โดยตรง เช่น เพศ อาชีพ ความคิดเห็น และที่อยู่

2. ข้อมูลเชิงปริมาณ (quantitative data) เป็นข้อมูลตัวเลขแสดงปริมาณซึ่งวัดออกมาเป็นจำนวนสามารถนำไปคำนวณเปรียบเทียบกันได้ เช่น อายุ ส่วนสูง น้ำหนัก รายได้ จำนวนนักเรียน และเงินเดือน

จำแนกตามแหล่งที่มาของข้อมูล แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่

1. ข้อมูลปฐมภูมิ (primary data) เป็นข้อมูลที่ใช้จะต้องลงพื้นที่เพื่อเก็บรวบรวมข้อมูลจากผู้ให้ข้อมูลหรือแหล่งที่มาของข้อมูลโดยตรง เช่น รวบรวมข้อมูลจากการสัมภาษณ์ การทดลอง หรือการสังเกตการณ์

2. ข้อมูลทุติยภูมิ (secondary data) เป็นข้อมูลที่ใช้ไม่ต้องทำการเก็บข้อมูลด้วยตนเองโดยตรง แต่นำมาจากแหล่งอื่นที่มีผู้ทำการเก็บรวบรวมข้อมูลไว้ให้แล้ว เช่น รายงาน วารสาร หนังสือพิมพ์และงานวิจัย

ข้อควรรู้

- ➔ ประชากร (population) ข้อมูลทั้งหมดของสิ่งต่าง ๆ ที่ต้องการศึกษาหรือต้องการสรุปอ้างอิง
- ➔ ตัวอย่าง (sample) ข้อมูลบางส่วนที่ถูกเลือกมาจากประชากร เพื่อการศึกษาวิเคราะห์ แล้วนำผลหรือข้อสรุปที่ได้ไปใช้อ้างอิงถึงประชากร
- ➔ ตัวแปร (variable) ลักษณะหรือสมบัติบางอย่างของสิ่งที่เราสนใจศึกษา ซึ่งเปลี่ยนแปลงค่าได้ในเชิงคุณภาพและปริมาณ
- ➔ พารามิเตอร์ (parameter) ตัวเลขที่แสดงคุณลักษณะหรือสมบัติของกลุ่มตัวอย่างที่คำนวณมาจากสมาชิกทั้งหมดของประชากร

การเก็บรวบรวมข้อมูล

วิธีเก็บรวบรวมข้อมูลปฐมภูมิ ทำได้ 2 วิธีดังนี้

1) การทำสำมะโน (census) เป็นการเก็บรวบรวมข้อมูลจากทุก ๆ หน่วยของประชากรหรือสิ่งที่เราต้องการศึกษา ซึ่งเหมาะสำหรับประชากรขนาดเล็กหรือขอบเขตการค้นคว้าไม่กว้างนัก เพราะเป็นวิธีที่เสียเวลาและค่าใช้จ่ายมาก

2) การสำรวจจากกลุ่มตัวอย่าง (sample survey) เป็นการรวบรวมข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างเพื่อนำมาใช้เป็นตัวแทนจากทุก ๆ หน่วยของประชากรหรือสิ่งที่เราต้องการศึกษา

ลักษณะการเก็บรวบรวมข้อมูลปฐมภูมิ แบ่งออกเป็น 5 วิธีดังนี้

- 1) การสัมภาษณ์ เป็นวิธีที่นิยมใช้กันมาก ได้ข้อมูลที่แท้จริง โดยผู้ให้สัมภาษณ์ต้องมีความซื่อสัตย์
- 2) การสอบถามทางไปรษณีย์ เป็นวิธีประหยัดเวลาและค่าใช้จ่าย อีกทั้งผู้ให้สัมภาษณ์ไม่ถูกกดดัน
- 3) การสอบถามทางโทรศัพท์ เป็นวิธีที่ง่ายและเสียค่าใช้จ่ายน้อย ซึ่งการสัมภาษณ์ต้องสั้น เพื่อให้ตอบได้ทันที
- 4) การสังเกต เป็นข้อมูลที่ได้จากการสังเกตและบันทึก ข้อมูลจะน่าเชื่อถือมากน้อยแค่ไหนขึ้นอยู่กับความชำนาญของผู้สังเกต
- 5) การทดลอง เป็นข้อมูลที่ได้จากการทดลอง ซึ่งมักจะใช้เวลานาน และต้องทำซ้ำ ๆ แต่ข้อมูลมีความถูกต้องและน่าเชื่อถือสูงหากไม่เกิดความคลาดเคลื่อนจากการวัดหรือการวางแผนการทดลอง

การนำเสนอข้อมูล ★

การนำเสนอข้อมูลแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะดังนี้

การนำเสนอข้อมูลอย่างไม่เป็นแบบแผน (informal presentation) เป็นการนำเสนอข้อมูลที่ไม่มีการผูกมัดตายตัว

1) การนำเสนอข้อมูลในรูปบทความ (text presentation) เป็นการนำเสนอข้อมูลมาบรรยาย ให้มีความสัมพันธ์ต่อเนื่องกันระหว่างข้อมูลและข้อความที่บรรยาย โดยส่วนใหญ่จะนำเสนอในรูปของข้อมูลสถิติอย่างง่าย

2) การนำเสนอข้อมูลในรูปข้อความกึ่งตาราง (semi-tabular arrangement) เป็นการนำเสนอข้อมูลโดยแยกตัวเลขออกจากข้อความ เพื่อต้องการให้เห็นตัวเลขที่ชัดเจน

การนำเสนอข้อมูลอย่างเป็นแบบแผน (formal presentation) เป็นการนำเสนอข้อมูลที่มีการผูกมัดซึ่งต้องปฏิบัติตามมาตรฐานที่กำหนดไว้เป็นแบบอย่าง โดยแบ่งออกเป็น 3 รูปแบบหลักดังนี้

1) การนำเสนอข้อมูลในรูปตาราง (tabular presentation) แบ่งออกเป็น 3 ชนิด ได้แก่ ตารางทางเดียว (one-way table) ตารางที่จำแนกรายการบนหัวเรื่องเพียงลักษณะเดียว เช่น ตารางแสดงการลงทุนของชาวต่างชาติระหว่างเดือนมกราคม - ธันวาคม พ.ศ. 2557

ประเทศ	การลงทุน (ล้านบาท)
สหรัฐอเมริกา	9,200
ญี่ปุ่น	1,020
เกาหลีใต้	840
สิงคโปร์	530

ตารางสองทาง (two-way table) ตารางที่จำแนกรายการบนหัวเรื่องและตัวชี้วัดทั้งสองด้าน เช่น ตารางแสดงจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตั้งแต่ พ.ศ. 2556 – 2558

พ.ศ.	จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	
	ชาย (คน)	หญิง (คน)
2556	200	355
2557	260	430
2558	232	443
รวม	692	1,228

ตารางหลายทาง (multi-way table) ตารางที่จำแนกรายการบนหัวเรื่องหรือตัวชี้วัดย่อยออกไปอีกจากตารางสองทาง เช่น ตารางแสดงคุณค่าทางโภชนาการของเนื้อสัตว์ทอดในส่วนที่รับประทานได้ต่อหน่วยบริโภค

อาหาร	หน่วยบริโภค (g)	พลังงาน (kcal)	องค์ประกอบ (g)			
			น้ำ	โปรตีน	ไขมัน	คาร์โบไฮเดรต
น่องไก่ทอด	120	298	64.6	32.6	17.0	3.2
ปีกไก่ทอด	40	107	20.0	11.4	6.1	1.6
อกไก่ทอด	170	362	95.2	49.8	16.0	4.8
โครังไก่ทอด	230	656	105	59.3	41.9	10.6

2) การนำเสนอข้อมูลในรูปแผนภูมิและแผนภาพ เพื่อสะดวกในการเปรียบเทียบข้อมูล แบ่งเป็น 4 ประเภทคือ

1. แผนภูมิแท่ง (bar chart) มีหลายชนิด เช่น
แผนภูมิแท่งเชิงเดี่ยว (simple bar chart)
แผนภูมิแท่งเชิงซ้อน (multiple bar chart)
แผนภูมิแท่งส่วนประกอบ (component bar chart)
แผนภูมิแท่งบวก-ลบ (plus-minus bar chart)
2. แผนภูมิรูปวงกลม (pie chart) เป็นแผนภูมิที่แสดงด้วยรูปวงกลม โดยแบ่งรูปวงกลมออกเป็น ส่วน ๆ จากศูนย์กลางของรูปวงกลม
3. แผนภูมิรูปภาพ (pictogram) เป็นแผนภูมิที่ใช้รูปภาพแทนค่าตัวเลขจำนวนหนึ่งของข้อมูลที่นำเสนอ
4. แผนที่สถิติ (statistical map) ใช้แผนที่เพื่อการเปรียบเทียบข้อมูลที่อยู่ในพื้นที่ทางภูมิศาสตร์

3) การนำเสนอข้อมูลโดยใช้กราฟเส้น คือข้อมูลที่แสดงการเปลี่ยนแปลงตามลำดับก่อนหลังของเวลา นิยมใช้กับข้อมูลที่มีจำนวนมากและอนุกรมเวลา มีหลายชนิดเช่น

1. กราฟเส้นเชิงเดี่ยว (simple line graph) แสดงการเปรียบเทียบลักษณะของข้อมูลเพียงลักษณะเดียว
2. กราฟเส้นเชิงซ้อน (multiple line graph) แสดงการเปรียบเทียบลักษณะของข้อมูลที่สนใจศึกษาตั้งแต่ 2 ลักษณะขึ้นไป
3. กราฟเส้นเชิงประกอบ (composite line graph) แสดงรายละเอียดหรือส่วนย่อยของข้อมูลในช่วงเวลาต่าง ๆ กันที่ต้องการเปรียบเทียบ
4. กราฟดุล (balance graph) แสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างลักษณะข้อมูล 2 ลักษณะที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกัน เช่น รายได้-รายจ่าย อัตราการเกิด-อัตราการตาย และต้นทุนการผลิต-ราคาขาย

ตารางแจกแจงความถี่

การนำข้อมูลมาจัดเป็นระบบ นอกเหนือจากการเรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปหามาก หากข้อมูลมีจำนวนมากและมีค่าซ้ำกัน ให้นำข้อมูลนั้นมาจัดเป็นกลุ่มลงตารางข้อมูล โดยข้อมูลที่มีค่าซ้ำกันให้อยู่ในกลุ่มเดียวกันในตารางตามความเหมาะสม แล้วนับจำนวนความถี่ (frequency) แต่ละกลุ่มข้อมูล ถือเป็นการแจกแจงความถี่ด้วยตารางนั่นเอง

องค์ประกอบของตารางแจกแจงความถี่

- 1) ความถี่ (frequency, f) จำนวนข้อมูลที่มีค่าซ้ำกันในแต่ละอันตรภาคชั้น
- 2) อันตรภาคชั้น (class interval) ช่วงหรือกลุ่มของข้อมูลที่แบ่งออกเป็นชั้น ๆ ของตารางแจกแจงความถี่
- 3) ขีดจำกัดบน (upper limit) ข้อมูลที่มีค่าสูงสุดในแต่ละอันตรภาคชั้น
- 4) ขีดจำกัดล่าง (lower limit) ข้อมูลที่มีค่าต่ำสุดในแต่ละอันตรภาคชั้น
- 5) ขอบบน (upper boundary) เป็นตัวเลขรอยต่อระหว่างอันตรภาคชั้นนั้นกับชั้นที่อยู่สูงกว่า หาได้จาก

$$\text{ขอบบน} = \frac{\text{ค่าที่มากที่สุดของอันตรภาคชั้น} + \text{ค่าที่น้อยที่สุดของอันตรภาคชั้นที่สูงกว่า 1 ชั้น}}{2}$$

- 6) ขอบล่าง (lower boundary) เป็นตัวเลขรอยต่อระหว่างอันตรภาคชั้นนั้นกับชั้นที่อยู่ต่ำกว่า หาได้จาก

$$\text{ขอบล่าง} = \frac{\text{ค่าที่น้อยที่สุดของอันตรภาคชั้นนั้น} + \text{ค่าที่มากที่สุดของอันตรภาคชั้นที่ต่ำกว่า 1 ชั้น}}{2}$$

- 7) ความกว้างของอันตรภาคชั้น จำนวนค่าของข้อมูลที่นับได้จากแต่ละชั้น หาได้จาก

$$\text{ความกว้างของอันตรภาคชั้น (I)} = \text{ขอบบน} - \text{ขอบล่าง}$$

8) จุดกึ่งกลางชั้น (mid point) เป็นค่าที่ใช้เป็นตัวแทนของข้อมูลในแต่ละอันตรภาคชั้น หาได้หลายวิธีดังนี้

$$\text{จุดกึ่งกลางชั้น} = \frac{\text{ขอบบน} + \text{ขอบล่าง}}{2}$$

$$\text{จุดกึ่งกลางชั้น} = \frac{\text{ขีดจำกัดบน} + \text{ขีดจำกัดล่าง}}{2}$$

9) ความถี่สะสม (cumulative frequency, F) เป็นผลรวมความถี่ในอันตรภาคชั้นนั้น และชั้นก่อนหน้าที่มีค่าต่ำกว่าทั้งหมด

10) จำนวนข้อมูล (N) เป็นจำนวนของข้อมูลทั้งหมด ซึ่งมีค่าเท่ากับความถี่สะสมของชั้นสุดท้ายเสมอ

$$N = \sum f$$

11) ความถี่สัมพัทธ์ (relative frequency, rf) อัตราส่วนระหว่างความถี่ของอันตรภาคชั้นนั้นกับจำนวนข้อมูลทั้งหมด ซึ่งอาจแสดงในรูปเศษส่วน ทศนิยม หรือร้อยละ

$$\text{ความถี่สัมพัทธ์ (rf)} = \frac{\text{ความถี่ (f)}}{\text{จำนวนข้อมูล (N)}}$$

12) ความถี่สะสมสัมพัทธ์ (relative cumulative frequency, rcf) อัตราส่วนระหว่างความถี่สะสมของอันตรภาคชั้นนั้นกับจำนวนข้อมูลทั้งหมด ซึ่งอาจแสดงในรูปเศษส่วน ทศนิยม หรือร้อยละ

$$\text{ความถี่สะสมสัมพัทธ์ (rcf)} = \frac{\text{ความถี่สะสม (F)}}{\text{จำนวนข้อมูล (N)}}$$

ค่าความถี่สะสมสัมพัทธ์ของ
อันตรภาคชั้นสุดท้ายต้องมีค่า
เท่ากับ 1 เสมอ

13) พิสัย (range) ค่าความแตกต่างระหว่างข้อมูลที่มีค่าสูงสุดกับข้อมูลที่มีค่าต่ำสุด

$$\text{พิสัย} = \text{คะแนนสูงสุด} - \text{คะแนนต่ำสุด}$$

การสร้างตารางแจกแจงความถี่

เราต้องสร้างตารางแจกแจงความถี่ให้อันตรภาคชั้นทุกชั้นมีความกว้างเท่ากัน มีขั้นตอนตามลำดับดังนี้

1) หาพิสัย

2) ขั้นนี้มี 2 วิธี ขึ้นอยู่กับข้อมูลที่โจทย์ให้มา

→ หาความกว้างของอันตรภาคชั้นเมื่อโจทย์กำหนดจำนวนชั้นมาให้

$$\text{ความกว้างของอันตรภาคชั้น} = \frac{\text{พิสัย}}{\text{จำนวนชั้น}} = \text{ขอบบน} - \text{ขอบล่าง}$$

→ หาจำนวนชั้นเมื่อโจทย์กำหนดความกว้างของอันตรภาคชั้นมาให้

$$\text{จำนวนชั้น} = \frac{\text{พิสัย}}{\text{ความกว้างของอันตรภาคชั้น}}$$

3) ใส่อันตรภาคชั้นแต่ละชั้นลงในตารางแจกแจงความถี่ ส่วนใหญ่จะเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก

4) นับจำนวนข้อมูลในแต่ละอันตรภาคชั้น เริ่มจากการใช้รอยขีด เพื่อง่ายต่อการจดบันทึก

5) นับจำนวนรอยขีดของข้อมูลในแต่ละอันตรภาคชั้น เพื่อแสดงความถี่ของข้อมูล

6) หาค่าต่าง ๆ ของข้อมูลตามที่โจทย์ต้องการให้แสดง เช่น จุดกึ่งกลางชั้น ความถี่สะสมและความถี่สัมพัทธ์

แบบฝึกหัด 3.1

จากข้อมูลผลการสอบวิชาวิทยาศาสตร์ปลายภาคของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2/1 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง

21	15	27	35	10	9	41	28	20	14
26	33	37	45	8	16	24	30	31	19
11	14	16	20	24	28	39	40	48	16

จงสร้างตารางแจกแจงความถี่ที่มี 7 อันตรภาคชั้น พร้อมทั้งแสดงความถี่สัมพัทธ์ ความถี่สะสมสัมพัทธ์ และจุดกึ่งกลางชั้นของแต่ละอันตรภาคชั้น

วิธีทำ จากข้อมูล ค่าสูงสุด ($X_{\max}$) = ค่าต่ำสุด($X_{\min}$) =

ขั้นที่ 1 หาพิสัย

ขั้นที่ 2 หาความกว้างของอันตรภาคชั้น

ขั้นที่ 3-5 เขียนอันตรภาคชั้นลงในตาราง พร้อมทั้งนับจำนวนข้อมูลและจำนวนรอยขีด เพื่อแสดงความถี่

คะแนน	รอยขีด	ความถี่
จำนวนข้อมูลรวม		

ขั้นที่ 6: แสดงข้อมูลที่โจทย์ต้องการ

คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม	ความถี่สัมพัทธ์	ความถี่สะสมสัมพัทธ์	จุดกึ่งกลางชั้น

การแจกแจงความถี่ด้วยกราฟหรือแผนภูมิ ☆

ฮิสโทแกรม (histogram) เป็นการนำเสนอข้อมูลในรูปของกราฟแท่ง ซึ่งใช้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นตัวแทนข้อมูลโดยอ่านข้อมูลจากแนวแกนดังนี้

แกนนอน คือค่าตัวแปร โดยความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมแทนความกว้างของอันตรภาคชั้น

แกนตั้ง คือค่าความถี่ของข้อมูล โดยความสูงของรูปสี่เหลี่ยมแทนความถี่ของข้อมูลแต่ละอันตรภาคชั้น ทั้งนี้ฮิสโทแกรมสร้างได้ 2 แบบ คือฮิสโทแกรมที่สร้างจากขอบล่าง-ขอบบน และจากจุดกึ่งกลางชั้น

รูปหลายเหลี่ยมของความถี่ (frequency polygon) เป็นกราฟเส้นที่แสดงการเชื่อมระหว่างจุดกึ่งกลางบนกราฟแต่ละแท่ง แล้วลากเชื่อมลงมาบนจุดกึ่งกลางแกนนอนของปลายทั้งสองข้างของพื้นที่ที่ไม่มีค่าความถี่ เกิดเป็นรูปหลายเหลี่ยมขึ้นนั่นเอง

เส้นโค้งของความถี่ (frequency curve) ลักษณะคล้ายรูปหลายเหลี่ยมของความถี่ แต่เกิดการปรับรูปหลายเหลี่ยมให้เป็นเส้นโค้ง

เส้นโค้งของความถี่สะสม (cumulative frequency curve) เป็นฮิสโทแกรมของความถี่สะสม แล้วลากเส้นโค้งให้ผ่านจุดปลายของแต่ละแท่ง มีประโยชน์ในการเปรียบเทียบข้อมูล ดังนั้นการสร้างกราฟได้ต้องสร้างตารางข้อมูลความถี่สะสมขึ้นมาก่อน

แบบฝึกหัด 3.2

จากตารางแจกแจงความถี่ข้อมูลของผลสอบกลางภาควิชาคณิตศาสตร์ คะแนนเต็ม 50 คะแนน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3/4 จำนวน 40 คน ของโรงเรียนแห่งหนึ่งเป็นดังตาราง

คะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)
7 - 13	4
14 - 20	9
21 - 27	12
28 - 34	10
35 - 41	5

จงแสดงฮิสโทแกรมของข้อมูลที่กำหนดให้ พร้อมวาดรูปหลายเหลี่ยมของความถี่
วิธีทำ

ค่ากลางของข้อมูล

ตัวแทนของข้อมูลทั้งหมดที่นำไปใช้ในการเปรียบเทียบหรือวิเคราะห์ ซึ่งค่ากลางที่ดีจะบอกข้อเท็จจริงได้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด ค่ากลางของข้อมูลที่นิยมใช้มี 3 ชนิดดังต่อไปนี้

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (arithmetic mean) เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $\bar{X}$ ซึ่งสามารถหาค่า $\bar{X}$ ได้ดังนี้

1) ข้อมูลไม่แจกแจงความถี่

x_i = ค่าของข้อมูล i = ลำดับของข้อมูล และ N คือจำนวนข้อมูลทั้งหมด

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \text{ หรือเขียนแบบย่อได้ } \bar{X} = \frac{\sum x}{N}$$

แบบฝึกหัด 3.3

ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย 8, 11, 9, 6, 12 และ 14 จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้
วิธีทำ

ตอบ

O-net'54

นักเรียน 10 คน มีน้ำหนัก 47, 48, 45, 48, 46, 44, 47, 45, 48, 52 กิโลกรัม ตามลำดับ ปรากฏว่ามีนักเรียน 2 คนออกจากกลุ่ม แต่นักเรียนที่เหลือยังคงมีน้ำหนักเฉลี่ยเท่ากับน้ำหนักเฉลี่ยของนักเรียน 10 คน ถามว่านักเรียนคนที่มือน้ำหนักเท่าไรในข้อต่อไปนี้ ไม่ใช่ นักเรียน 2 คนที่ออกจากกลุ่ม

1. 44 กิโลกรัม 2. 46 กิโลกรัม 3. 47 กิโลกรัม 4. 48 กิโลกรัม



เฉลย

ตอบข้อ 1

แนวคิด

หาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนักเรียน 10 คนได้

$$\bar{X} = \frac{470}{10} = 47$$

เมื่อเหลือนักเรียน 8 คน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตยังเป็น 47

ทำให้รู้ว่าน้ำหนักของนักเรียน 8 คน คือ 376 กิโลกรัม

ดังนั้น น้ำหนักของนักเรียน 2 คน ที่ออกจากกลุ่มคือ

$$470 - 376 = 94 \text{ กิโลกรัม}$$

ตอบ ข้อ 1. 44 กิโลกรัม เพราะ $94 - 44 = 50$ กิโลกรัม

ซึ่งไม่มีนักเรียนคนใดหนัก 50 กิโลกรัม

2) ข้อมูลแจกแจงความถี่

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{N} \text{ หรือเขียนย่อได้ } \bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$$

สูตรลัด

$$\bar{X} = a + l \left(\frac{\sum fd}{N} \right)$$

a = จุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้น เลือกชั้นที่มีความถี่สูงสุด

l = ความกว้างของอันตรภาคชั้น

d = 0 ในชั้นของ a

d = -1, -2, -3, ... ตามลำดับในชั้นที่ข้อมูลต่ำกว่า a

d = 1, 2, 3, ... ตามลำดับในชั้นที่ข้อมูลอยู่สูงกว่า a

x_i = จุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้นนั้น ๆ ตั้งแต่ i - k ตามลำดับ

f_i = ความถี่ของข้อมูล

N = จำนวนข้อมูลทั้งหมด

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม (combined arithmetic mean, $\bar{X}_c$) เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่เกิดจากการรวบรวมข้อมูลของตัวอย่างหลาย ๆ ชุด ค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่เป็นตัวแทนข้อมูลที่แท้จริงคือค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวมของข้อมูลทั้งหมด ซึ่งเราหาได้จากค่าเฉลี่ยเลขคณิตแต่ละชุด ดังนี้

$$\bar{X}_c = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \text{ หรือเขียนย่อได้ } \bar{X}_c = \frac{\sum n \bar{X}}{N_{\text{รวม}}}$$

โดย $\bar{X}_i$ = ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลแต่ละชุดตั้งแต่ i - k ตามลำดับ

n_i = จำนวนข้อมูลแต่ละชุดตั้งแต่ i - k ตามลำดับ

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตถ่วงน้ำหนัก (weighted arithmetic mean, $\bar{X}_w$) เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่เกิดจากการให้ความสำคัญข้อมูลแต่ละตัวไม่เท่ากัน โดยความสำคัญมากน้อยนั้นจะขึ้นอยู่กับน้ำหนักของข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งค่าเฉลี่ยเลขคณิตแบบถ่วงน้ำหนักที่พบบ่อย เช่น การคิดเกรดเฉลี่ยของนักเรียน หาได้จาก

$$\bar{X}_w = \frac{\sum_{i=1}^k w_i x_i}{\sum_{i=1}^k w_i} \text{ หรือเขียนแบบย่อได้ } \bar{X}_w = \frac{\sum wx}{w_{\text{รวม}}}$$

โดย x_i = ค่าของข้อมูลแต่ละค่าตั้งแต่ $i - k$ ตามลำดับ

w_i = น้ำหนักของข้อมูลแต่ละชุดตั้งแต่ $i - k$ ตามลำดับ

มัธยฐาน (median, Md) เป็นค่ากลางของข้อมูลอีกชนิดหนึ่ง เป็นข้อมูลที่อยู่ตรงกลาง เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก นิยมใช้กับข้อมูลที่สูงกว่าหรือต่ำกว่าค่าอื่นมาก ๆ สามารถหาได้จากข้อมูล 2 รูปแบบดังนี้

1) ข้อมูลไม่แจกแจงความถี่ หาจาก

→ เรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปมาก

→ หาตำแหน่งของมัธยฐาน เมื่อ N เป็นจำนวนของข้อมูล

$$\text{ตำแหน่งของมัธยฐาน} = \frac{N+1}{2}$$

→ นับข้อมูลเพื่อหาข้อมูลที่อยู่ตรงตำแหน่งของมัธยฐานพอดี แล้วนำค่านั้นมาตอบได้เลย



ข้อควรรู้

→ ถ้าจำนวนข้อมูลทั้งหมดเป็นจำนวนคี่ ตำแหน่งของมัธยฐานอยู่ตรงกลางพอดี

→ ถ้าจำนวนข้อมูลทั้งหมดเป็นจำนวนคู่ ตำแหน่งของมัธยฐานคือค่าเฉลี่ยของคู่ข้อมูลที่อยู่ตรงกลาง

2) ข้อมูลแจกแจงความถี่ หาจาก

→ หาความถี่สะสมจากน้อยไปมาก

→ หาตำแหน่งของมัธยฐาน

$$\text{ตำแหน่งของมัธยฐาน} = \frac{N}{2}$$

→ หาค่ามัธยฐานจากสูตร

$$Md = L_0 + I \frac{\left(\frac{N}{2} - F\right)}{f}$$

L_0 = ขอบล่างของชั้นที่มีมัธยฐาน

I = ความกว้างของอันตรภาคชั้นที่มีมัธยฐาน

f = ความถี่ของชั้นที่มีมัธยฐาน

F = ความถี่สะสมของชั้นก่อนหน้ามัธยฐาน

ฐานนิยม (mode, Mo) ค่าของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด หาได้จากข้อมูล 2 รูปแบบดังนี้

1) ข้อมูลไม่แจกแจงความถี่ ฐานนิยมอาจมีหรือไม่มีก็ได้ ให้ดูจากข้อมูลที่ซ้ำกันมากที่สุด

→ ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมีข้อมูลที่มีความถี่เท่ากันหมด จะถือว่าข้อมูลนั้นไม่มีฐานนิยม

→ ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมีข้อมูลที่มีความถี่สูงสุดเท่ากันมากกว่าหนึ่งข้อมูล ในที่นี้จะไม่พิจารณาหาฐานนิยมของข้อมูลชุดนั้น จึงถือว่าไม่มีฐานนิยม

2) ข้อมูลแจกแจงความถี่ หาได้ 2 วิธี ดังนี้

→ จากการพิจารณาความถี่ของข้อมูลเป็นการหาฐานนิยมโดยประมาณ

ฐานนิยม = จุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้นที่มีความถี่สูงสุด

→ จากสูตร เป็นการหาฐานนิยมที่แท้จริง

$$Mo = L_0 + I \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$$

L_0 = ขอบล่างของชั้นที่มีฐานนิยม (อยู่ในชั้นที่มีความถี่สูงสุด)

I = ความกว้างของอันตรภาคชั้นที่มีฐานนิยม

d_1 = ผลต่างระหว่างความถี่ของชั้นที่มีฐานนิยมกับความถี่ของชั้นที่มีคะแนนน้อยกว่าที่อยู่ติดกัน

d_2 = ผลต่างระหว่างความถี่ของชั้นที่มีฐานนิยมกับความถี่ของชั้นที่มีคะแนนมากกว่าที่อยู่ติดกัน

น้ำหนักเฉลี่ยของนักเรียน 6 คนเท่ากับ 45 กิโลกรัม นักเรียนแต่ละคนมีน้ำหนัก 40, 41, 45, 49, 50, A กิโลกรัมตามลำดับ ฐานนิยมของน้ำหนักของนักเรียน 6 คนนี้ เท่ากับมัธยฐานของน้ำหนักในข้อใด

1. 45, 50

2. 41, 59

3. 42, 49

4. 35, 55



เฉลย

ตอบข้อ 4

แนวคิด

หาน้ำหนักของ A จาก

$$45 = \frac{40 + 41 + 45 + 49 + 50 + A}{6}$$

$$45 = \frac{225 + A}{6}$$

$$270 = 225 + A$$

$$A = 45$$

ดังนั้น ฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้จึงเท่ากับ 45

เมื่อหามัธยฐานของคำตอบแต่ละข้อ พบว่า

$$\frac{35 + 55}{2} = 45$$

ดังนั้นจึงตอบข้อ 4.

โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่ากลางของข้อมูล ★

เนื่องจากค่ากลางของข้อมูลมีความสัมพันธ์กัน ทำให้โจทย์ปัญหาพลิกแพลงได้หลากหลาย ดังนั้น เราต้องทราบสมบัติต่าง ๆ ของค่ากลางก่อนทำโจทย์ปัญหาดังนี้

ข้อสังเกตค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{X}$)

- 1) ถ้านำค่าคงตัว c บวกกับข้อมูลทุกตัวแล้ว $\bar{X}_{\text{ใหม่}} = \bar{X}_{\text{เดิม}} + c$
- 2) ถ้านำค่าคงตัว c ลบออกจากข้อมูลทุกตัวแล้ว $\bar{X}_{\text{ใหม่}} = \bar{X}_{\text{เดิม}} - c$
- 3) ถ้านำค่าคงตัว c คูณกับข้อมูลทุกตัวแล้ว $\bar{X}_{\text{ใหม่}} = \bar{X}_{\text{เดิม}} \cdot c$
- 4) ถ้านำค่าคงตัว c ไปหารข้อมูลทุกตัวแล้ว $\bar{X}_{\text{ใหม่}} = \frac{\bar{X}_{\text{เดิม}}}{c}$

หลักเกณฑ์การใช้ค่ากลางชนิดต่าง ๆ

- 1) เลือกใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นค่ากลางของข้อมูล เมื่อข้อมูลนั้นไม่มีค่าใดค่าหนึ่งที่กระโดดสูงหรือต่ำผิดปกติไปจากปกติ
- 2) เลือกใช้มัธยฐานเป็นค่ากลางของข้อมูล เมื่อข้อมูลแต่ละค่าต่างกันมาก กระโดดสูงต่ำผิดปกติ ไม่เกาะกลุ่มกัน
- 3) เลือกใช้ฐานนิยมเป็นค่ากลางของข้อมูล เมื่อต้องการดูแนวโน้มของข้อมูลส่วนใหญ่

การวัดการกระจายของข้อมูล ★

ค่าสถิติที่ใช้อธิบายลักษณะการกระจายของข้อมูล ถ้าข้อมูลชุดนั้นประกอบด้วยค่าที่ต่างกัน เรียกว่าเป็นข้อมูลที่มีการกระจายมาก ในทางกลับกัน ถ้าข้อมูลมีค่าต่างกันน้อยเรียกว่าเป็นข้อมูลที่มีการกระจายน้อย และถ้าข้อมูลชุดนั้นมีค่าเท่ากันหมดเรียกว่าเป็นข้อมูลที่ไม่มีการกระจาย โดยการวัดการกระจายสมบูรณ์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่นักเรียนมักพบเจอ ได้แก่ พิสัย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ความรู้เพิ่มเติม วิธีวัดการกระจายของข้อมูล แบ่งออกเป็น 2 วิธี

การวัดการกระจายสมบูรณ์ (absolute variation) เป็นการวัดการกระจายของข้อมูลเพียงชุดเดียว

- พิสัย (range)
- ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ (quartile deviation)
- ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (mean deviation)
- ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation)

การวัดการกระจายสัมพัทธ์ (relative variation) เป็นการวัดการกระจายของข้อมูลที่มีมากกว่า 1 ชุด เพื่อใช้ในการเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลเหล่านั้น

- สัมประสิทธิ์ของพิสัย (coefficient of range)
- สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ (coefficient of quartile deviation)
- สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (coefficient of mean deviation)
- สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน (coefficient of variation)

พิสัย (range) การวัดการกระจายข้อมูลอย่างหยาบ ๆ คิดจากค่าความแตกต่างระหว่างค่าสูงสุดกับค่าต่ำสุดของข้อมูล ถ้าพิสัยมีค่ามาก หมายถึงข้อมูลมีการกระจายมาก ถ้าพิสัยมีค่าน้อย หมายถึงข้อมูลมีการกระจายน้อย หาได้จากข้อมูล 2 รูปแบบดังนี้

1) ข้อมูลไม่แจกแจงความถี่

$$\text{พิสัย} = X_{\max} - X_{\min}$$

2) ข้อมูลแจกแจงความถี่

$$\begin{aligned} \text{พิสัย} &= \text{ขอบบนของอันตรภาคชั้นที่มีค่าสูงสุด} \\ &\quad - \text{ขอบล่างของอันตรภาคชั้นที่มีค่าต่ำสุด} \end{aligned}$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation, s) การกระจายข้อมูลที่ใช้ข้อมูลทุกค่ามาคำนวณ จึงเป็นค่าที่ดีที่สุดที่ใช้บอกการกระจายของข้อมูล หาได้จากสูตรในตาราง

ความแปรปรวน (variance, s^2) คือกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

รูปแบบข้อมูล	สูตร	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)	ความแปรปรวน (s ²)
ไม่แจกแจง ความถี่	ในรูปคะแนนเบี่ยงเบน	$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{N - 1}}$	$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{N - 1}$
	ในรูปคะแนนดิบ	$s = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}}{N - 1}}$	$s^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}}{N - 1}$
		$s = \sqrt{\frac{N\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}}{N(N - 1)}}$	$s^2 = \frac{N\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}}{N(N - 1)}$
แจกแจงความถี่	ในรูปคะแนนเบี่ยงเบน	$s = \sqrt{\frac{\sum f(x_i - \bar{X})^2}{N - 1}}$	$s^2 = \frac{\sum f(x_i - \bar{X})^2}{N - 1}$

ความรู้เพิ่มเติม สูตรคำนวณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและความแปรปรวนของประชากรจะแตกต่างจากสูตรคำนวณของข้อมูลในระดับตัวอย่างดังนี้

กรณีไม่แจกแจงความถี่

$$\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน } (\sigma) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \mu^2}$$

$$\text{ความแปรปรวน } (\sigma^2) = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum x^2}{N} - \mu^2$$

μ = ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของประชากร

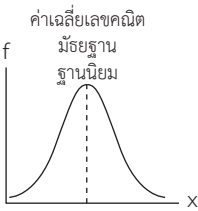
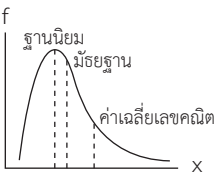
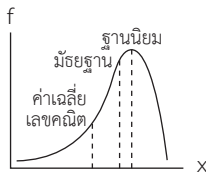
N = จำนวนข้อมูลทั้งหมดของประชากร

สัญลักษณ์ “ σ ” อ่านว่า ซิกม่า

ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความถี่

ค่ากลาง และการกระจายข้อมูล ☆

ลักษณะการกระจายของข้อมูลแบ่งได้เป็น 3 แบบ พิจารณาตามฮิสโทแกรมในตารางข้อมูลต่อไปนี้

ข้อมูล	เส้นโค้งปกติ	เส้นโค้งเบ้ขวา	เส้นโค้งเบ้ซ้าย
กราฟ	 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ฐานนิยม f x โค้งปกติ	 ฐานนิยม ค่าเฉลี่ยเลขคณิต f x โค้งเบ้ขวา	 ฐานนิยม ค่าเฉลี่ยเลขคณิต f x โค้งเบ้ซ้าย
ลักษณะ	กราฟสมมาตร	กราฟเบ้ไปทางขวา (ภูเขาเตี้ยลงทางขวา)	กราฟเบ้ไปทางซ้าย (ภูเขาเตี้ยลงทางซ้าย)
สมบัติ	$\bar{X} = Md = Mo$	$Mo < Md < \bar{X}$	$\bar{X} < Md < Mo$
ข้อควรจำ	จุดสูงสุดของภูเขาจะเป็นจุดของค่าฐานนิยม (Mo) เสมอ เพราะแสดงการเกาะกลุ่มกันของข้อมูล		

ความรู้เพิ่มเติม ลักษณะโค้งที่เกิดจากการแจกแจงข้อมูล

การแจกแจงข้อมูลจะมีลักษณะโค้งที่นอกเหนือจากหลักสูตรอีกมากมาย เช่น โค้งรูปตัว U โค้ง 2 ตอน (bi-modal) โค้งรูปตัว J และโค้งหลายตอน (multi-modal)

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1) จากตารางแจกแจงความถี่ต่อไปนี้ จงหาค่ามัธยฐาน

อันตรภาคชั้น	ความถี่
11 - 20	10
21 - 30	5
31 - 40	5
41 - 50	25
51 - 60	15

วิธีทำ

ตอบ

2) จงหาค่ามัธยฐานของข้อมูลต่อไปนี้ 3, 2, 4, 6, 7, 9, 5, 8, 8, 2, 4

วิธีทำ

ตอบ

3) น้ำหนักของคน 8 คนคือ 55, 45, 42, 57, 62, 60, 45 และ 53 จงหามัธยฐานของน้ำหนักเหล่านี้

วิธีทำ

ตอบ

4) คะแนนสอบภาคปฏิบัติวิชาพลศึกษาคะแนนเต็ม 100 คะแนนของนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 15 คนเป็นดังนี้ 9, 8, 4, 5, 6, 9, 8, 7, 3, 4, 5, 6, 8, 5 และ 7 จงหาฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้

วิธีทำ

ตอบ

5) ผลการตรวจความพึงพอใจการบริการของพนักงานประจำสถาบันเสริมความงามแห่งหนึ่งพบว่า ลูกค้ายที่ร่วมทำแบบสอบถามทั้งหมด 20 คน ให้คะแนนความพึงพอใจพนักงาน จากระดับ 1 (น้อยที่สุด)-ระดับ 5 (มากที่สุด) เป็นดังนี้ 4, 3, 3, 2, 5, 4, 5, 5, 4, 5, 3, 2, 2, 4, 3, 4, 5, 2, 3, และ 2 จงหาฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้

วิธีทำ

ตอบ

6) จากการสำรวจน้ำหนักของนักเรียน 4 คน ฐานนิยมเป็น 40 กิโลกรัม มัธยฐานเป็น 39 กิโลกรัม พิสัยเท่ากับ 6 กิโลกรัม มีนักเรียน 2 คนที่มีน้ำหนักน้อยกว่าฐานนิยม ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับเท่าไร

วิธีทำ

ตอบ

7) ในการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียน 50 คน ได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 20 ปรากฏว่าอาจารย์คิดคะแนนผิดไป 2 คน โดยคนแรกอ่านจาก 10 เป็น 17 และคนสุดท้ายอ่าน 14 เป็น 12 คะแนน จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่ถูกต้อง

วิธีทำ

ตอบ

8) จากข้อมูลที่เรียงลำดับจากน้อยไปมาก 2, 4, 4, 5, 5, m, 8, 8, และ 10 ข้อมูลชุดนี้มีมัธยฐานน้อยกว่าฐานนิยม จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้

วิธีทำ

ตอบ

บทนิยาม ★

ความน่าจะเป็น (probability) คือค่าของโอกาส (chance) หรือความเป็นไปได้ (possibility) ซึ่งวัดค่าได้เป็นตัวเลข 0-1 โดยต้องอาศัยความรู้เรื่องของกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับหรืออาจใช้แผนภาพต้นไม้ เพื่อใช้ในการหาค่าเหตุการณ์ที่สนใจ (E) ต่อเหตุการณ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้หรือแซมเปิลสเปซ (S) ให้ถูกต้อง

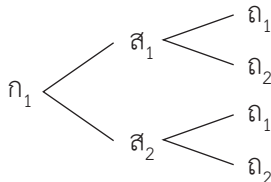
แผนภาพต้นไม้ (tree diagram) ★

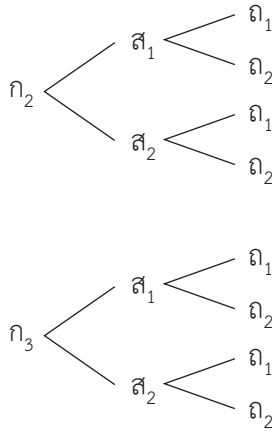
การนับจำนวนวิธีทั้งหมดที่เหตุการณ์อย่างใดอย่างหนึ่งจะเป็นไปได้ โดยจำนวนวิธีในการจัดชุดของสิ่งต่าง ๆ มักแก้ปัญหาโดยใช้แผนภาพต้นไม้ ซึ่งเป็นแผนภาพที่แสดงการหาจำนวนที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการกระทำ

แบบฝึกหัด 4.1

นักเรียนคนหนึ่งมีกางเกง 3 ตัว เสื้อ 2 ตัว และถุงเท้า 2 คู่ นักเรียนคนนี้จะแต่งกายด้วยกางเกง เสื้อ และถุงเท้าได้กี่วิธี

วิธีทำ ก หมายถึง กางเกง, ส หมายถึง เสื้อ, ถ หมายถึง ถุงเท้า





ตอบ นักเรียนคนนี้แต่งกายได้ วิธี

กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ ★

เป็นการหาจำนวนวิธีทำงานต่าง ๆ ออกมาอย่างมีแบบแผน และไม่เสียเวลาในการวาดรูปเหมือนแผนภาพต้นไม้ หลักวิธีคิดแบ่งออกเป็น 2 กฎดังนี้

กฎการคูณ

ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งประกอบด้วย k ขั้นตอนย่อยที่ต่อเนื่องกัน โดยที่

ขั้นตอนที่ 1 เลือกวิธีทำได้ n_1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกวิธีทำได้ n_2 วิธี

ขั้นตอนที่ k เลือกวิธีทำได้ n_k วิธี

จำนวนวิธีทำงานทั้งหมดที่เป็นไปได้เท่ากับ $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ วิธี

แบบฝึกหัด 4.2

- 1) น้องขวัญมีเสื้อ 4 ตัวและกางเกง 3 ตัวที่มีสีแตกต่างกัน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่น้องขวัญจะสวมเสื้อและกางเกงเป็นชุดต่าง ๆ กันได้ทั้งหมดกี่ชุด

วิธีทำ เป็นเหตุการณ์ที่ต่อเนื่องกันเพราะเสื้อกับกางเกงต้องใส่เป็นชุดเดียวกันจึงต้องใช้กฎการคูณ

มีเสื้อ 4 ตัว	ขั้นตอนย่อยที่ 1 มี 4 วิธี
มีกางเกง 3 ตัว	ขั้นตอนย่อยที่ 2 มี 3 วิธี
วิธีทำงานทั้งหมด =	

ตอบ

- 2) สร้างจำนวนสองหลักจากเลขโดด 1, 2, 3 โดยไม่ใช้ตัวเลขซ้ำกัน จะสร้างได้กี่จำนวน

วิธีทำ

ตอบ

กฎการบวก

ถ้าการทำงานอย่างหนึ่ง มีวิธีการทำงาน k แบบ ซึ่งแต่ละแบบงานเสร็จในตัวเอง ไม่ต่อเนื่องกับแบบอื่นและไม่สามารถเกิดขึ้นพร้อมกันได้ กล่าวคือแยกกันโดยเด็ดขาดโดยที่

แบบที่ 1 ทำได้ n_1 วิธี

แบบที่ 2 ทำได้ n_2 วิธี

⋮

แบบที่ k ทำได้ n_k วิธี

โดยที่จำนวนวิธีทำงานทั้งหมดที่เป็นไปได้เท่ากับ $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ วิธี

แบบฝึกหัด 4.3

- 1) นายคณิตต้องเดินทางจากเมือง A ไปเมือง C โดยมีถนนจากเมือง A ไปเมือง B อยู่ 3 เส้นทาง จากเมือง B ไปเมือง C อยู่ 2 เส้นทาง นอกจากนั้นยังมีถนนจากเมือง A ไปเมือง C ได้โดยตรงซึ่งไม่ต้องผ่านเมือง B อยู่ 5 เส้นทาง จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่คณิตจะเดินทางจากเมือง A ไปเมือง C ได้

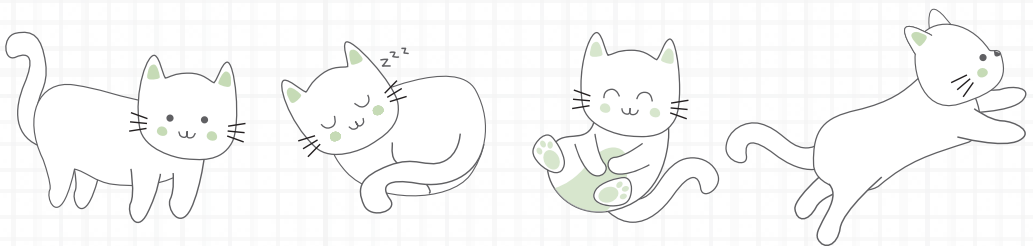
วิธีทำ

ตอบ

2) จงสร้างจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่า 100 ที่ประกอบด้วยเลขโดด 0, 1, 2 และ 3 โดยที่ไม่ใช้ตัวเลขซ้ำจะสร้างได้กี่จำนวน

วิธีทำ

ตอบ



แฟกทอเรียล (factorial) ☆

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก แฟกทอเรียล n หมายถึง ผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n เขียนแทนด้วย $n!$

จากนิยาม $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

จะได้ว่า $n! = n \times (n-1)!$

**** ข้อควรรู้ $0! = 1$ ****

แบบฝึกหัด 4.4

1) จงหาค่าของ $\frac{11!}{9!}$

วิธีทำ

ตอบ

2) จงหาค่าของ n จากสมการ $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 1,640$

วิธีทำ

ตอบ

วิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutation) ☆

เป็นวิธีจัดเรียงสิ่งของซึ่งอาจนำมาเพียงบางส่วนหรือนำมาเรียงทั้งหมด โดยยึดลำดับหรือตำแหน่งของแต่ละสิ่งเป็นสำคัญ มีวิธีคิด 4 รูปแบบดังนี้

วิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนวเส้นตรง

สิ่งของ n สิ่ง นำมาจัดเรียงแนวเส้นตรงได้ $n!$ วิธี

แบบฝึกหัด 4.5

มีนักเรียน 6 คน ต้องการจัดเรียงแถวเป็นเส้นตรงจะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ จาก n สิ่ง จัดเรียงแนวเส้นตรงได้ $n!$ วิธี

นักเรียน 6 คน จัดเรียงได้ $6! =$ $=$ $=$ วิธี

ตอบ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนววงกลม

1) การจัดเรียงของสิ่งมีชีวิตหรือวัตถุที่ไม่สามารถพลิกได้ เช่น การจัดคนนั่งรอบนั่งโต๊ะกลม การจัดกระถาง หรือต้นไม้ล้อมรอบเสาธง

สิ่งของ n สิ่ง นำมาจัดเรียงแนววงกลมได้ $(n - 1)!$ วิธี

แบบฝึกหัด 4.6

มีนักเรียนชาย 3 คนและหญิง 3 คน ต้องการจัดเรียงแถวเป็นวงกลม โดยมีเงื่อนไขว่าผู้หญิงทั้ง 3 คน ต้องยืนติดกันเสมอ จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ จาก n สิ่ง จัดเรียงแนววงกลมได้ $(n - 1)!$ วิธี

นักเรียน 6 คน จัดเรียงได้

ตอบ

2) การจัดเรียงของวัตถุที่สามารถพลิกกลับด้านได้ เช่น ลูกปัด พวงกุญแจ พวงมาลัย

$$\text{สิ่งของ } n \text{ สิ่ง นำมาจัดเรียงแนววงกลมพลิกได้} = \frac{(n-1)!}{2}$$

แบบฝึกหัด 4.7

นำลูกปัดที่มีสีแตกต่างกันจำนวน 6 ลูกมาร้อยเป็นพวง จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ จาก n สิ่ง จัดเรียงแนววงกลมพลิกได้ $\frac{(n-1)!}{2}$ วิธี

ลูกปัด 6 ลูก ร้อยเป็นพวงได้

ตอบ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบมีเงื่อนไข

1) ต้องการจัดให้มีสิ่งที่อยู่ติดกัน มีหลักวิธีคิดคือให้จับมัดสิ่งที่ต้องอยู่ติดกันรวมเป็นก้อนเดียวกัน แล้วนับจำนวนรวมทั้งหมดใหม่เพื่อหาจำนวน n หลังจากนั้นให้คิดว่าในก้อนเดียวกันนั้นเราสามารถสลับที่กันได้ด้วย

แบบฝึกหัด 4.8

มีนักเรียนชาย 3 คนและหญิง 3 คน ต้องการจัดเรียงแถวเป็นเส้นตรง โดยมีเงื่อนไขว่าผู้หญิงทั้ง 3 คน ต้องยืนติดกันเสมอ จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ ให้คิดในใจว่ามัดผู้หญิง 3 คนเป็นก้อนเดียวกันเพราะต้องยืนติดกันเสมอ

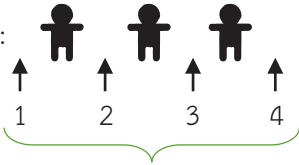
ตอบ

2) ต้องการจัดให้มีสิ่งที่อยู่แยกกัน (ห้ามติดกัน) มีหลักวิธีคิดคือให้สร้างช่องไฟโดยการกระชากออก จากนั้นนับตำแหน่งช่องว่างที่เหลือสำหรับจัดลำดับสับเปลี่ยน ทั้งนี้อย่าลืมคิดตัวหลักที่สามารถจัดเรียงสลับที่กันได้ด้วย

แบบฝึกหัด 4.9

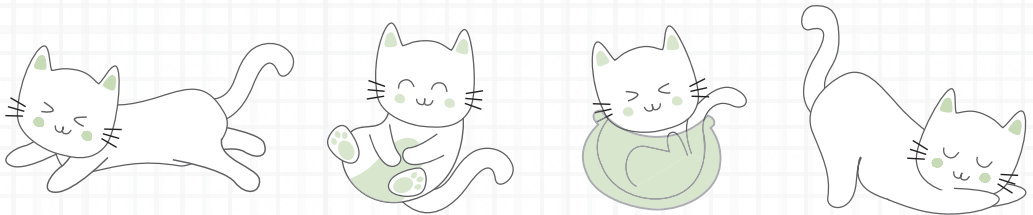
มีนักเรียนชาย 3 คนและหญิง 3 คน ต้องการจัดเรียงแถวเป็นเส้นตรง โดยมีเงื่อนไขว่าผู้หญิงทั้ง 3 คน ต้องยืนแยกกันเสมอ จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ ให้วางตำแหน่งของผู้ชายก่อน โดยจัดเว้นให้ห่างกัน เพื่อให้ผู้หญิงเข้ามาแทรก

จัดตำแหน่งให้ผู้ชายก่อน :  $\therefore$ ผู้ชายสลับที่กันได้ = 3!

มีจำนวนช่องว่างให้ผู้หญิงแทรก 4 ช่อง

ตอบ



3) ต้องการจัดเรียงสิ่งของในแนวเส้นตรงแต่มีบางสิ่งซ้ำกัน

$$\text{จำนวนวิธี} = \frac{\text{จำนวนสิ่งของทั้งหมด!}}{\text{ตัวซ้ำ!}}$$

แบบฝึกหัด 4.10

กำหนดตัวอักษร ABBB จงหาว่านำตัวอักษรมาเรียงสับเปลี่ยนตำแหน่งกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ มีตัวอักษรทั้งหมด 4 ตัว แต่มีตัว B ซ้ำทั้งหมด 3 ตัว

$$\text{จำนวนวิธี} = \frac{\text{จำนวนทั้งหมด!}}{\text{ตัวซ้ำ!}}$$

ตอบ

วิธีเรียงสับเปลี่ยนในแนวเส้นตรงคราวละ r สิ่ง จากสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

โดยที่ $r \leq n$ ** การจัดเรียงตำแหน่งมีผล เช่น $AB \neq BA$ **

แบบฝึกหัด 4.11

1) มีตัวอักษร 5 ตัว คือ A, B, C, D และ E นำมาจัดเรียง 2 ตัว จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนแนวเส้นตรงจาก n สิ่ง คราวละ r สิ่ง โดยใช้สูตร $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

ตัวอักษรทั้งหมด 5 ตัว คือ $n=5$ และนำมาจัดเรียงคราวละ 2 ตัว คือ $r=2$

$$P_{5,2} =$$

ตอบ

2) จงหาค่า n จากสมการต่อไปนี้ $P_{n, 5} = 20P_{n, 4}$

วิธีทำ

ตอบ

วิธีจัดหมู่ (combination) ★

เป็นการจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกันโดยไม่คำนึงถึงอันดับของสิ่งของนั้น เรียกได้ว่าเป็นวิธีเลือกที่ลำดับไม่มีผลนั่นเอง โดยจำนวนวิธีจัดหมู่ของ n สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาจัดหมู่คราวละ r สิ่ง หาได้จาก

$$C_{n, r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

โดยที่ $r \leq n$ **การจัดเรียงตำแหน่งไม่มีผล เช่น $AB = BA$ **

แบบฝึกหัด 4.12

มีผู้สมัครเข้าร่วมเป็นกรรมการหมู่บ้านจัดสรรแห่งหนึ่งทั้งหมด 9 คน แต่กรรมการชุดหนึ่งจะมีได้เพียง 5 คนเท่านั้น จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกกรรมการทั้งหมดที่เป็นไปได้

วิธีทำ เป็นการเลือกจาก n สิ่ง คราวละ r สิ่ง ใช้สูตร $C_{n, r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

ผู้สมัครชิงตำแหน่งกรรมการทั้งหมด 9 คน คือ $n = 9$

แต่เลือกเป็นกรรมการได้ 5 คน คือ $r = 5$

$$C_{n, r} =$$

ตอบ

ความน่าจะเป็น (probability) ☆

ค่าของโอกาส (chance) หรือความเป็นไปได้ (possibility) ที่มีค่าอยู่ในช่วงตั้งแต่ 0 ถึง 1

ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต้องรู้

1) การทดลองสุ่ม (random experiment) คือการทดลองที่เราทราบว่าผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นอาจเป็นอะไรได้บ้าง แต่ทำนายไม่ได้ว่าผลลัพธ์แต่ละครั้งที่ออกมาจะเป็นอะไร เช่น

- ➔ โยนเหรียญ 1 ครั้ง หน้าที่ยกขึ้นอาจออกหัว (H) หรือ ก้อย (T) ก็ได้ แต่เราไม่ทราบว่า จะออกหัวหรือก้อย
- ➔ ทอดลูกเต๋า 1 ครั้ง หน้าที่ยกขึ้นอาจเป็นแต้ม 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 ก็ได้ แต่ไม่ทราบว่า แต่ละครั้งจะออกแต้มอะไร

2) แซมเปิลสเปซ (sample space, S) คือเซตของผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม เช่น

- ➔ ทอดลูกเต๋า 1 ครั้ง สนใจแต้มของลูกเต๋า ดังนั้นแซมเปิลสเปซ คือ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ➔ โยนเหรียญ 1 เหรียญ 2 ครั้ง สนใจหน้าของเหรียญที่ออก ดังนั้นแซมเปิลสเปซคือ $\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

3) เหตุการณ์ (events, E) คือสิ่งที่สนใจจะพิจารณาจากการทดลองสุ่ม เรียกว่าเป็นกลุ่มย่อยของแซมเปิลสเปซ

- ➔ โยนเหรียญ 1 ครั้ง สนใจหน้าของเหรียญที่ออกหัวเท่านั้น ดังนั้นเหตุการณ์คือ $\{H\}$
- ➔ ทอดลูกเต๋า 1 ครั้ง สนใจแต้มของลูกเต๋าก่อนที่ออกเป็นเลขคู่เท่านั้น ดังนั้น เหตุการณ์คือ $\{2, 4, 6\}$

แม่ค้าขายผลไม้มีเหรียญ 1 บาท 5 บาท และ 10 บาท อย่างละ 10 เหรียญ แม่ค้าจัดเหรียญวางเป็นกองกองละ 3 เหรียญ โดยแต่ละกองมีค่าไม่เท่ากัน (เช่นกองหนึ่งมีเหรียญ 1 บาท 2 เหรียญ เหรียญ 5 บาท 1 เหรียญ รวมกันเป็น 7 บาท) แม่ค้าจะจัดเรียงเหรียญเป็นกอง ๆ ให้มีค่าของเงินแตกต่างกันได้กี่แบบ

- | | |
|----------|-----------|
| 1. 7 แบบ | 2. 8 แบบ |
| 3. 9 แบบ | 4. 10 แบบ |



เฉลย

ตอบข้อ 4

แนวคิด

แม่ค้าขายผลไม้มีเหรียญ 1 บาท 5 บาท และ 10 บาท อย่างละ 10 เหรียญ
แม่ค้าจัดเหรียญวางเป็นกองกองละ 3 เหรียญ

จะได้ $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 5), (1, 1, 10), (1, 5, 1), (1, 5, 5), (1, 5, 10), (1, 10, 1), (1, 10, 5), (1, 10, 10), (5, 1, 1), (5, 1, 5), (5, 1, 10), (5, 5, 1), (5, 5, 5), (5, 5, 10), (5, 10, 1), (5, 10, 5), (5, 10, 10), (10, 1, 1), (10, 1, 5), (10, 1, 10), (10, 5, 1), (10, 5, 5), (10, 5, 10), (10, 10, 1), (10, 10, 5), (10, 10, 10)\}$

$$n(S) = 27$$

แม่ค้าจะจัดเรียงเหรียญเป็นกองให้มีค่าของเงินแตกต่างกันได้

$E = \{(1, 1, 1), (1, 1, 5), (1, 1, 10), (1, 5, 5), (1, 5, 10), (1, 10, 10), (5, 5, 5), (5, 5, 10), (5, 10, 10), (10, 10, 10)\}$

$$n(E) = 10$$

∴ แม่ค้าจะจัดเรียงเหรียญเป็นกองให้มีค่าของเงินแตกต่างกันได้ 10 แบบ

วิธีคำนวณความน่าจะเป็น

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$n(E)$ = จำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่สนใจ พิจารณาจากการทดลองสุ่ม

$n(S)$ = จำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ

สมบัติของความน่าจะเป็น

- 1) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 หรือ 0 SP
- 2) $P(E) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $E = \emptyset$
- 3) $P(S) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $E = S$
- 4) ถ้า $P(E)$ = ความน่าจะเป็นที่เกิดเหตุการณ์แล้ว $P(E')$ = ความน่าจะเป็นที่ไม่เกิดเหตุการณ์ แล้ว $P(E) + P(E') = 1$ หรือ $P(E') = 1 - P(E)$

ข้อมูลสำคัญในการทำโจทย์ปัญหาความน่าจะเป็น

1) ลูกเต๋า (dice) เป็นลูกบาศก์สี่เหลี่ยมจัตุรัส 6 หน้า แต่ละหน้าจะมีแต้มตั้งแต่ 1–6 เมื่อเราทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน จะปรากฏผลเป็นแต้มต่าง ๆ ในแซมเปิลสเปซได้ทั้งหมด 36 แบบดังนี้

ลูก 2 \ ลูก 1						
	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

2) ไพ่ (cards) ใน 1 สำรับมีจำนวนทั้งหมด 52 ใบ ประกอบด้วยไพ่ที่แตกต่างกันทั้งหมด 4 ชุด ชุดละ 13 ใบ แต่ละชุดจะมีสัญลักษณ์ที่แตกต่างกัน ได้แก่ ดอกจิก โพดำ โพแดง และ ข้าวหลามตัด ทั้งนี้ในชุด 13 ใบ จะประกอบไปด้วยตัวเลข 2 ถึง 10 และมีไพ่พิเศษ ได้แก่ J (Jack), Q (Queen), K (King) และ A (Ace)

แบบฝึกหัด 4.13

โยนลูกเต๋า 2 ลูกที่มีสีแตกต่างกันพร้อม ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าค้อออกแต้ม 3

วิธีทำ โยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน สนใจแต้มของลูกเต๋าทันที 2 ลูกที่เกิดขึ้น $n(S) = 36$

นับเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าค้อออกแต้ม 3 จากตารางที่แสดงสมาชิกทั้งหมดของแซมเปิลสเปซ

ลูก 2 \ ลูก 1						
	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ตอบ

3) ค่าคาดหวัง

$$\text{ค่าคาดหวัง} = (\text{ผลตอบแทนที่ได้} \times \text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้}) + (\text{ผลตอบแทนที่ไม่ได้} \times \text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไม่ได้})$$

O-net'57

มีบัตรเลขโดด 4 ใบ ดังนี้

1	2	3	4
---	---	---	---

นำบัตรออกมา 2 ใบ วางเรียงกันเป็นจำนวนสองหลักแล้วบันทึกไว้ทั้งหมด ความน่าจะเป็นที่จำนวนนั้นเป็นจำนวนเฉพาะเป็นเท่าไร

1. $\frac{4}{12}$

2. $\frac{5}{12}$

3. $\frac{6}{12}$

4. $\frac{7}{12}$



เฉลย

ตอบข้อ 2

แนวคิด

$$S = \{12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43\}$$

$$n(S) = 12$$

จำนวนที่มีสองหลักเป็นจำนวนเฉพาะ

$$E = \{13, 23, 31, 41, 43\}$$

$$n(E) = 5$$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{12}$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1) กล่องใบหนึ่งมีบัตรคำภาษาอังกฤษอยู่ 5 แผ่น ได้แก่ car, run, notebook, telephone และ sing ถ้าให้นักเรียนสุ่มหยิบบัตรคำขึ้นมา 1 แผ่น อยากทราบว่าบัตรคำที่หยิบได้จะเป็นคำชนิดใดมากกว่ากันระหว่างคำนามกับคำกริยา

1.1 บัตรคำที่เป็นคำนาม ได้แก่ _____

1.2 โอกาสที่จะหยิบบัตรคำนาม เท่ากับ _____

1.3 บัตรคำที่เป็นคำกริยา ได้แก่ _____

1.4 โอกาสที่จะหยิบบัตรคำกริยา เท่ากับ _____

1.5 บัตรคำที่หยิบได้จะเป็นคำชนิดใดมากกว่ากันระหว่าง คำนาม กับ คำกริยา _____

2) จงเขียนเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่เป็นการทดลองสุ่ม และเขียนเครื่องหมาย ✕ หน้าข้อความที่ไม่ใช่การทดลองสุ่ม

_____ 1) การหยิบไฟ 1 ใบ จากไฟหนึ่งสำหรับ

_____ 2) การคัดส้มโอทับทิมสยามที่มีตำหนิออกจากกองส้มโอ 50 ผล

_____ 3) คอกสุนัขหนึ่งมีลูกสุนัข 4 ตัว สายฟ้าเลือกจับลูกสุนัขที่ตัวเองชอบขึ้นมา 1 ตัว

_____ 4) การทดลองทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

_____ 5) การสุ่มคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์จากนักเรียนทั่วประเทศ

_____ 6) การหาผลคูณของสองจำนวน

_____ 7) การหยิบลูกแก้ว 1 ลูก จากกล่องที่บ้แสงที่มีลูกแก้วสีแดง 2 ลูก และสีขาว 3 ลูก

_____ 8) การหมุนวงล้อออกรางวัลเลขท้าย 2 ตัว ในงานกาชาดประจำปี

_____ 9) การจับสลากเข้าเรียนต่อในโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้

_____ 10) การปาลูกดอก 1 ครั้ง บนเป้าที่มีแต้ม 3, 5, 7 และ 9

_____ 11) การทำข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์

3) เลือกอักษรจากคำว่า sandwich ขึ้นมา 1 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่ตัวอักษรนั้นจะเป็น

3.1) สระ

3.2) พยัญชนะ

4) การสอบวิชาคณิตศาสตร์แบบเลือกตอบ 20 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน ผู้ที่สอบผ่านต้องได้คะแนนตั้งแต่ 60% ขึ้นไป จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะสอบไม่ผ่าน

วิธีทำ

ตอบ

5) บริษัทประกันภัยรถยนต์แห่งหนึ่ง พบว่าจากสถิติที่ผ่านมา มีผู้ประกันภัยรถยนต์เพียง 15% ที่จะประสบอุบัติเหตุ และแต่ละครั้งบริษัทจะจ่ายค่าประกันประมาณ 20,000 บาท ถ้าบริษัทประกันภัยคิดค่าประกันเพียง 1,000 บาทต่อการทำประกันภัยหนึ่งราย

5.1) ความน่าจะเป็นของผู้ประกันภัยรถยนต์จะเกิดอุบัติเหตุเป็นเท่าใด
วิธีทำ

ตอบ

5.2) ความน่าจะเป็นของผู้ประกันภัยรถยนต์จะไม่เกิดอุบัติเหตุเป็นเท่าใด
วิธีทำ

ตอบ

5.3) จงหาค่าคาดหวังว่าบริษัทประกันภัยมีโอกาสได้กำไรหรือขาดทุน
วิธีทำ

ตอบ

เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 1

แบบฝึกหัด 1.1 จงเขียนเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่เป็นจริง
และเครื่องหมาย × หน้าข้อความที่เป็นเท็จ

- ⊗ 1) π เป็นจำนวนจริงแบบจำนวนอตรรกยะ เพราะ เป็นทศนิยมไม่ซ้ำแบบไม่รู้จบ
- ⊗ 2) 0 ไม่ใช่จำนวนเต็มบวก เพราะ 0 เป็นจำนวนเต็มศูนย์
- ✓ 3) $-\frac{1}{6}$ เป็นจำนวนตรรกยะ เพราะ เขียนในรูปเศษส่วนได้
- ⊗ 4) 8.3333333... เป็นจำนวนตรรกยะ เพราะ เป็นทศนิยมซ้ำ
- ✓ 5) $\sqrt{9} - \sqrt{4}$ เป็นจำนวนเต็มบวก เพราะ ผลลัพธ์คือ 1
- ⊗ 6) $\sqrt{23}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ เพราะ ผลลัพธ์เป็นทศนิยมไม่ซ้ำแบบไม่รู้จบ
- ⊗ 7) $2.8\dot{4}$ เป็นจำนวนตรรกยะ เพราะ เป็นทศนิยมซ้ำ เขียนในรูปเศษส่วนได้
- ✓ 8) $\sqrt{8} \div \sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ เพราะ ผลลัพธ์คือ 2
- ✓ 9) $2 - \sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ เพราะ จำนวนอตรรกยะ - จำนวนอตรรกยะ ได้จำนวนอตรรกยะ
- ⊗ 10) จำนวนเต็มลบที่น้อยที่สุดไม่ใช่ -1 เพราะ -1 คือจำนวนเต็มลบที่มากที่สุด
- ✓ 11) $-\sqrt{7}$ ไม่ใช่จำนวนเต็มลบ เพราะ $-\sqrt{7}$ ไม่ใช่จำนวนเต็ม
- ⊗ 12) 100,000,000 ไม่ใช่จำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุด เพราะ ไม่มีจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุด

แบบฝึกหัด 1.2 จงหาผลลัพธ์

- 1) $\sqrt[9]{0} = 0$
- 2) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2) \times (-2) \times (-2)} = -2$
- 3) $\sqrt{-9}$ หาค่าไม่ได้ เพราะไม่เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด 1.3 จงหาผลลัพธ์

กรณีส่วนเท่ากัน	กรณีส่วนไม่เท่ากัน
1) $\frac{35}{5} + \frac{90}{5}$ <u>วิธีทำ</u> $\frac{35+90}{5} = \frac{125}{5} = 25$	2) $\frac{28}{27} - \frac{80}{81}$ <u>วิธีทำ 1</u> ค.ร.น ของ 27 และ 81 คือ 81 $\frac{28 \times 3}{27 \times 3} - \frac{80}{81} = \frac{84-80}{81} = \frac{4}{81}$ <u>วิธีทำ 2</u> ใช้สูตร $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$ $\frac{28 \times 81}{27 \times 81} - \frac{80 \times 27}{81 \times 27} = \frac{2,268}{2,187} - \frac{2,160}{2,187} = \frac{2,268-2,160}{2,187} = \frac{108}{2,187} = \frac{4}{81}$

แบบฝึกหัด 1.4 จงหาผลลัพธ์

การคูณเศษส่วน	การหารเศษส่วน
1) $\frac{27}{30} \times 9 = \frac{27 \times 9}{30} = \frac{243}{30} = \frac{81}{10} = 8.1$	3) $\frac{28}{27} \div 80 = \frac{28}{27} \times \frac{1}{80} = \frac{28 \times 1}{27 \times 80} = \frac{28}{2,160} = \frac{7}{540}$
2) $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{6 \times 5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$	4) $\frac{15}{3} \div \frac{9}{15} = \frac{15}{3} \times \frac{15}{9} = \frac{15 \times 15}{3 \times 9} = \frac{225}{27} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$

แบบฝึกหัด 1.5 จงเปลี่ยนรูปเศษส่วนต่อไปนี้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

1) $\frac{84}{119} = \frac{1}{7} \times \frac{12}{17} = \frac{12}{17}$
2) $\frac{162}{108} = \frac{1}{27} \times \frac{6}{4} = \frac{6}{4} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

แบบฝึกหัด 1.6 จงเรียงลำดับเศษส่วน

1) จงเรียง $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$ จากน้อยไปมาก

ค.ร.น. ของ 3, 4 และ 6 มีค่าเท่ากับ 12 ดังนั้นต้องทำให้ตัวส่วนเท่ากับ 12

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12} \quad \left| \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12} \quad \left| \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12} \right.$$

$$\text{เรียงลำดับได้ดังนี้ } \frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12} \therefore \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$$

2) จงเรียง $\frac{9}{10}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{8}$ จากมากไปน้อย

ค.ร.น. ของ 3, 8 และ 10 มีค่าเท่ากับ 120 ดังนั้นต้องทำให้ตัวส่วนเท่ากับ 120

$$\frac{9}{10} = \frac{9 \times 12}{10 \times 12} = \frac{108}{120} \quad \left| \quad \frac{1}{3} = \frac{1 \times 40}{3 \times 40} = \frac{40}{120} \quad \left| \quad \frac{7}{8} = \frac{7 \times 15}{8 \times 15} = \frac{105}{120} \right.$$

$$\text{เรียงลำดับได้ดังนี้ } \frac{108}{120} > \frac{105}{120} > \frac{40}{120} \therefore \frac{9}{10} > \frac{7}{8} > \frac{1}{3}$$

แบบฝึกหัด 1.7 จงเขียนทศนิยมซ้ำในรูปแบบย่อ

1) 0.444444... เขียนรูปแบบย่อ คือ 0.4 อ่านว่า ศูนย์จุดสี่ สี่ซ้ำ

2) 2.565656... เขียนรูปแบบย่อ คือ 2.56 อ่านว่า สองจุดห้าหก ห้าหกซ้ำ

3) 0.789789... เขียนรูปแบบย่อ คือ 0.789 อ่านว่า ศูนย์จุดเจ็ดแปดเก้า เจ็ดแปดเก้าซ้ำ

4) 8.000333... เขียนรูปแบบย่อ คือ 8.0003 อ่านว่า แปดจุดศูนย์ศูนย์ศูนย์สาม สามซ้ำ

5) 6.002424... เขียนรูปแบบย่อ คือ 6.0024 อ่านว่า หกจุดศูนย์ศูนย์สองสี่ สองสี่ซ้ำ

แบบฝึกหัด 1.8 จงเปลี่ยนทศนิยมให้เป็นเศษส่วน

$$1) 0.222222... = 0.2 = \frac{2}{9}$$

$$2) 3.262626... = 3.2\dot{6} = 3\frac{26}{99}$$

$$3) 0.789789... = 0.78\dot{9} = \frac{789}{999}$$

$$4) 8.191191... = 8.19\dot{1} = 8\frac{191}{999}$$

แบบฝึกหัด 1.9 จงเปลี่ยนทศนิยมให้เป็นเศษส่วน

1) 0.000444...

วิธีทำ เขียนเป็นทศนิยมซ้ำได้ 0.0004

∴ ซ้ำ 1 ตัวคือ 4 และไม่ซ้ำ 3 ตัวคือ 000

$$\begin{aligned} 0.0004 &= \frac{4 - 000}{9,000} \\ &= \frac{4}{9,000} \end{aligned}$$

2) 0.005656...

วิธีทำ เขียนเป็นทศนิยมซ้ำได้ 0.0056

∴ ซ้ำ 2 ตัวคือ 56 และไม่ซ้ำ 2 ตัวคือ 00

$$\begin{aligned} 0.0056 &= \frac{56 - 00}{9,900} \\ &= \frac{56}{9,900} \end{aligned}$$

3) 6.12789789...

วิธีทำ เขียนเป็นทศนิยมซ้ำได้ 6.12789

∴ ซ้ำ 3 ตัวคือ 789 และไม่ซ้ำ 2 ตัวคือ 12

$$\begin{aligned} 6.12789 &= 6 \frac{12,789 - 12}{99,900} \\ &= 6 \frac{12,777}{99,900} \\ &= \frac{(6 \times 99,900) + 12,777}{99,900} \\ &= \frac{612,177}{99,900} \end{aligned}$$

4) 0.23191191...

วิธีทำ เขียนเป็นทศนิยมซ้ำได้ 0.23191

∴ ซ้ำ 3 ตัวคือ 191 และไม่ซ้ำ 2 ตัวคือ 23

$$\begin{aligned} 0.23191 &= \frac{23,191 - 23}{99,900} \\ &= \frac{23,168}{99,900} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.10 จงปัดทศนิยม

ตอบเป็นทศนิยม 1 ตำแหน่ง

ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง

ตอบเป็นทศนิยม 3 ตำแหน่ง

1) $5.46 \approx 5.5$

4) $3.052 \approx 3.1$

7) $1.5567 \approx 1.557$

2) $6.12 \approx 6.1$

5) $8.231 \approx 8.23$

8) $23.6454 \approx 23.645$

3) $10.32 \approx 10.3$

6) $3.4050 \approx 3.41$

9) $50.11673 \approx 50.117$

แบบฝึกหัด 1.11 จงหาค่า x จากสมการ

$$1) \frac{x+1}{3} = \frac{22}{6}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{3} &= \frac{22}{6} \\ 6(x+1) &= 3(22) \\ 6x+6 &= 66 \\ 6x &= 66-6 \\ 6x &= 60 \\ x &= \frac{60}{6} \\ \therefore x &= 10\end{aligned}$$

ตอบ $x = 10$

$$2) \frac{x-3}{4} = \frac{x+2}{2}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{4} &= \frac{x+2}{2} \\ 2(x-3) &= 4(x+2) \\ 2x-6 &= 4x+8 \\ 2x-4x &= 8+6 \\ -2x &= 14 \\ x &= -\frac{14}{2} \\ \therefore x &= -7\end{aligned}$$

ตอบ $x = -7$

$$3) \frac{15+x}{5} = \frac{x}{2}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{15+x}{5} &= \frac{x}{2} \\ 2(15+x) &= 5(x) \\ 30+2x &= 5x \\ 2x-5x &= -30 \\ -3x &= -30 \\ x &= \frac{-30}{-3} \\ \therefore x &= 10\end{aligned}$$

ตอบ $x = 10$

$$4) \frac{4x+2}{-8} = \frac{x+6}{2}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{4x+2}{-8} &= \frac{x+6}{2} \\ 2(4x+2) &= -8(x+6) \\ 8x+4 &= -8x-48 \\ 8x+8x &= -48-4 \\ 16x &= -52 \\ x &= -\frac{52}{16} \\ \therefore x &= -\frac{13}{4}\end{aligned}$$

ตอบ $x = -3\frac{1}{4}$

แบบฝึกหัด 1.12

เอ๋มทำงาน 8 วัน ได้เงิน 896 บาท ส่วนเคทำงาน 17 วัน ได้เงิน 2,108 บาท จงหาอัตราส่วนรายได้ของเคต่อเอ๋ม

วิธีทำ รายได้ของเอ๋ม → ทำงาน 8 วัน ได้เงิน 896 บาท

$$\text{ทำงาน 1 วัน ได้เงิน } \frac{896}{8} = 112 \text{ บาท}$$

รายได้ของเค → ทำงาน 17 วัน ได้เงิน 2,108 บาท

$$\text{ทำงาน 1 วัน ได้เงิน } \frac{2,108}{17} = 124 \text{ บาท}$$

$$\begin{aligned} \text{อัตราส่วนรายได้ของเคต่อเอ๋ม} &\rightarrow \frac{\text{รายได้เค}}{\text{รายได้เอ๋ม}} \\ &= \frac{124}{112} \\ &= \frac{31}{28} \end{aligned}$$

ตอบ อัตราส่วนรายได้ของเคต่อเอ๋มคือ 31 : 28

แบบฝึกหัด 1.13

โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนทั้งหมด 2,500 คน เป็นนักเรียนหญิง 1,600 คน อยากทราบว่าโรงเรียนนี้มีนักเรียนชายคิดเป็นร้อยละเท่าใด

วิธีทำ จำนวนนักเรียนชาย = จำนวนนักเรียนทั้งโรงเรียน – จำนวนนักเรียนหญิง

$$\text{มีนักเรียนชาย} = 2,500 - 1,600 = 900 \text{ คน}$$

จาก 2,500 มีนักเรียนชาย 900 คน

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } 100 \text{ มีนักเรียนชาย } &\frac{100 \times 900}{2,500} \\ &= 36 \end{aligned}$$

ตอบ มีนักเรียนชายร้อยละ 36

แบบฝึกหัด 1.14 โจทย์ปัญหาพื้นฐาน

แม่ค้าคนหนึ่งซื้อสินค้ามาในราคา 1,250 บาท แต่ขายไปในราคา 1,500 บาท จะได้กำไรกี่เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ เปอร์เซ็นต์กำไร = $\frac{\text{ราคาขาย} - \text{ต้นทุน}}{\text{ต้นทุน}} \times 100$

$$= \frac{1,500 - 1,250}{1,250} \times 100$$
$$= \frac{250}{1,250} \times 100$$
$$= 20\%$$

ตอบ ได้กำไร 20%

แบบฝึกหัด 1.15 โจทย์ปัญหาประยุกต์

1) ร้านค้าคิดราคาสินค้าเพื่อที่จะเอากำไร 20% ปรากฏว่าขายไม่ได้จึงประกาศลดราคา 10% อยากทราบว่าถ้าขายสินค้าชนิดนี้ตามราคาที่ประกาศลดจะได้กำไรกี่เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ โจทย์ไม่กำหนดทุน ดังนั้น กำหนดให้ทุนเป็น 100 บาท
ตัวเลขที่คิดออกมาจะตอบเป็น % เลย

คิดราคาสินค้า กำไร 20%

$$\text{ราคาขาย} = \text{ราคาทุน} + \text{กำไร}$$

$$\text{ราคาขาย} = 100 + 20$$

$$\text{ราคาขาย} = 120$$

ลดราคา 10% จากป้าย

$$\text{ลดราคา} = \frac{10}{100} \times 120$$
$$= 12$$

$$\therefore \text{แสดงว่าขายที่ราคา } 120 - 12 = 108 \text{ บาท}$$

$$\text{คิดเป็นกำไร} = 108 - 100 = 8 \text{ บาท}$$

จากทุน 100 แสดงว่ากำไร 8%

คิดเป็นเปอร์เซ็นต์กำไร

$$\frac{\text{ราคาขาย} - \text{ต้นทุน}}{\text{ต้นทุน}} \times 100$$
$$= \frac{108 - 100}{100} \times 100 = 8\%$$

ตอบ กำไร 8%

แบบฝึกหัด 1.15 โจทย์ปัญหาประยุกต์

2) ถ้าขายปากกาได้กำไร 20% ขายสมุดได้กำไร 10% โดยต้นทุนของสมุดเป็นสามเท่าของปากกา การขายของครั้งนี้ได้กำไรกี่เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ โจทย์ไม่กำหนดทุน ดังนั้นต้องกำหนดทุนเอง

กำหนดให้ ทุนปากกา a บาท

ทุนสมุด $3a$ บาท

รวมต้นทุนทั้งหมด $= a + 3a = 4a$

ราคาขาย = ทุน + กำไร

ขายปากกาได้กำไร 20%

ราคาขายคิดเป็น % จากทุน $= 100 + 20 = 120\%$

$$\begin{aligned}\therefore \text{ราคาขายปากกา} &= \frac{120}{100} \times a \\ &= 1.2a\end{aligned}$$

ขายสมุดได้กำไร 10%

ราคาขายคิดเป็น % จากทุน $= 100 + 10 = 110\%$

$$\begin{aligned}\therefore \text{ราคาขายสมุด} &= \frac{110}{100} \times 3a \\ &= 3.3a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ขายของรวมกันได้เงิน} &= 1.2a + 3.3a \\ &= 4.5a\end{aligned}$$

คิดเป็นเปอร์เซ็นต์กำไร

$$\begin{aligned}&= \frac{\text{ราคาขาย} - \text{ต้นทุน}}{\text{ต้นทุน}} \times 100 \\ &= \frac{4.5a - 4a}{4a} \times 100 \\ &= \frac{0.5a}{4a} \times 100 \\ &= 0.125 \times 100 \\ &= 12.5\%\end{aligned}$$

ตอบ กำไร 12.5%

แบบฝึกหัด 1.16 เติมคำตอบลงในช่องว่าง

$$1) 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

$$2) 5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$$

$$3) 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4 = 6,561$$

แบบฝึกหัด 1.17 จงเขียนในรูปแบบสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

- | | | | |
|--------------|-----------------------------------|----------------------------|----------------------------------|
| 1) 8 | $\rightarrow 8 \times 10^0$ | 6) 53×10^{-9} | $\rightarrow 5.3 \times 10^{-8}$ |
| 2) 2,000 | $\rightarrow 2 \times 10^3$ | 7) 109×10^2 | $\rightarrow 1.09 \times 10^4$ |
| 3) 72,000 | $\rightarrow 7.2 \times 10^4$ | 8) 0.04×10^{-2} | $\rightarrow 4 \times 10^{-4}$ |
| 4) 0.0245 | $\rightarrow 2.45 \times 10^{-2}$ | 9) $6,125 \times 10^3$ | $\rightarrow 6.125 \times 10^6$ |
| 5) 0.0000112 | $\rightarrow 1.12 \times 10^{-5}$ | 10) $3,800 \times 10^{-3}$ | $\rightarrow 3.8 \times 10^0$ |

แบบฝึกหัด 1.18 จงหาค่าของ x จากสมการที่กำหนดให้

- | | |
|--|---|
| <p>1) $8^{3x+5} = 4^{7x+5}$</p> <p>$(2^3)^{3x+5} = (2^2)^{7x+5}$</p> <p>$2^{(9x+15)} = 2^{(14x+10)}$</p> <p>$9x + 15 = 14x + 10$</p> <p>$15 - 10 = 14x - 9x$</p> <p>$5 = 5x$</p> <p>$1 = x$</p> | <p>2) $125^{6x+2} = 5^{2x+38}$</p> <p>$(5^3)^{6x+2} = (5^1)^{2x+38}$</p> <p>$5^{(18x+6)} = 5^{2x+38}$</p> <p>$18x + 6 = 2x + 38$</p> <p>$18x - 2x = 38 - 6$</p> <p>$16x = 32$</p> <p>$x = 2$</p> |
|--|---|

แบบฝึกหัด 1.19

เอกนาม	สัมประสิทธิ์ของเอกนาม	ดีกรีของเอกนาม (ผลรวมของเลขชี้กำลังของตัวแปร)
1) $10x$	10	1
2) $-3a^2b^3$	-3	$2 + 3 = 5$
3) $\frac{1}{6}hj^3k^4$	$\frac{1}{6}$	$1 + 3 + 4 = 8$
4) $-\frac{1}{25}x^2y^6z^8$	$-\frac{1}{25}$	$2 + 6 + 8 = 16$

แบบฝึกหัด 1.20

พหุนาม	พหุนามในรูปผลสำเร็จ	ดีกรีของพหุนาม
1) $5a^2b^3 - 4a^2b^3 + 3ab^2$	$3ab^2 + a^2b^3$	คิดจากเอกนาม $(a^2b^3): 2 + 3 = 5$
2) $-85x^3y^7 + 50x^4y^5 + 50y^7x^3$	$-35x^3y^7 + 50x^4y^5$	คิดจากเอกนาม $(15x^3y^7): 3 + 7 = 10$

แบบฝึกหัด 1.21

1) จงหาผลบวกของพหุนาม $6a^3 + 3a^2 \text{ และ } 5a^3 + 7a^2$ $= (6a^3 + 3a^2) + (5a^3 + 7a^2)$ $= 6a^3 + 5a^3 + 3a^2 + 7a^2$ $= (6a^3 + 5a^3) + (3a^2 + 7a^2)$ $= 11a^3 + 10a^2$	2) จงหาผลลบของพหุนาม $13b^3 + 2b^2 \text{ และ } 9b^3 - 7b^2$ $= (13b^3 + 2b^2) - (9b^3 - 7b^2)$ $= 13b^3 + 2b^2 - 9b^3 + 7b^2$ $= (13b^3 - 9b^3) + (2b^2 + 7b^2)$ $= 4b^3 + 9b^2$
---	--

แบบฝึกหัด 1.22

1) $2y^3 \times (3y^2 - 6)$ $= (2y^3 \times 3y^2) \times [2y^3 \times (-6)]$ $= (2 \times 3)(y^3 \times y^2) \times [2 \times (-6)]y^3$ $= 6y^5 - 12y^3$	2) $(6m^2 + 29m + 20) \div (m + 4)$ $\begin{array}{r} m+4 \overline{) 6m^2+29m+20} \\ \underline{6m^2+24m} \\ 5m+20 \\ \underline{5m+20} \\ 0 \end{array}$ $6m + 5$ ← ผลลัพธ์ หารลงตัว (ไม่เหลือเศษ) $\therefore (m + 4) \times (6m + 5) = 6m^2 + 29m + 20$ ผลลัพธ์คือ $6m + 5$
--	---

แบบฝึกหัด 1.23

จงหาเศษจากพหุนาม $(5x^6 - 27x^4 + 2x^3 - 50x) \div (x + 2)$

วิธีทำ $P(x) = 5x^6 - 27x^4 + 2x^3 - 50x$

$x - a = x + 2 \therefore a = -2$ ****ระวังแทนค่า a ผิด คำตอบผิดทันที!**

$$\begin{aligned} \text{แทนค่าเพื่อหาเศษของพหุนาม } P(-2) &= 5(-2)^6 - 27(-2)^4 + 2(-2)^3 - 50(-2) \\ &= 5(64) - 27(16) + 2(-8) + 100 \\ &= 320 - 432 - 16 + 100 \\ &= -28 \end{aligned}$$

$\therefore$ ตอบ เศษ -28

แบบฝึกหัด 1.24

จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 + 6x + 5$ โดยกำลังสองสมบูรณ์

วิธีทำ จาก $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 5 &= [x^2 + (2)(x)(3) + 3^2] + 5 - 3^2 \text{ ****เมื่อบวกเข้าต้องลบออก สมการจึงเท่าเดิม**} \\ &= (x + 3)^2 + 5 - 9 \\ &= (x + 3)^2 - 4 \\ &= (x + 3)^2 - 2^2 \\ &= [(x + 3) - 2][(x + 3) + 2] \text{ ****คิดจากผลต่างกำลังสอง**} \\ &= (x + 1)(x + 5) \end{aligned}$$

$\therefore$ ตอบ $x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5)$

แบบฝึกหัด 1.25

1) จงหาค่าของ $\frac{x-2}{x^2-4} - \frac{x-5}{x+2}$

$$= \frac{x-2}{x^2-2^2} - \frac{x-5}{x+2}$$

$$= \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} - \frac{x-5}{x+2}$$

$$= \frac{1}{x+2} - \frac{x-5}{x+2}$$

$$= \frac{1-x+5}{x+2}$$

$$= \frac{6-x}{x+2}$$

ตอบ $\frac{6-x}{x+2}$

2) จงหาค่าของ $\frac{a^3-8}{a^2-4} \times \frac{a^2+4a+4}{a^2+2a+4}$

$$= \frac{a^3-2^3}{a^2-2^2} \times \frac{(a+2)(a+2)}{a^2+2a+4}$$

$$= \frac{\cancel{(a-2)}(\cancel{a^2+2a+4})}{\cancel{(a-2)}(a+2)} \times \frac{(a+2)(a+2)}{\cancel{a^2+2a+4}}$$

$$= a+2$$

ตอบ $a+2$

แบบฝึกหัด 1.26

ลูกอมรสส้มขายในราคาบาทละ 2 เม็ด และลูกอมรสมะนาวขายในราคาบาทละ 3 เม็ด ถ้าซื้อลูกอมทั้ง 2 รสด้วยเงิน 30 บาท และได้ลูกอมมาทั้งหมด 70 เม็ด จะมีลูกอมรสส้มกี่เม็ด

วิธีทำ

จากโจทย์ จำนวนลูกอมรสส้มเป็นสิ่งที่โจทย์ถาม

กำหนดให้ซื้อลูกอมรสส้มจำนวน x เม็ด

จากโจทย์ ซื้อลูกอมทั้งหมด 70 เม็ด

ซื้อลูกอมรสมะนาวเป็นจำนวน $70-x$ เม็ด

จากโจทย์ ลูกอมรสส้ม 1 เม็ด ราคา $\frac{1}{2}$ บาท

ซื้อลูกอมรสส้มจำนวน x เม็ด ราคา $\frac{x}{2}$ บาท

จากโจทย์ ลูกอมรสมะนาว 1 เม็ด ราคา $\frac{1}{3}$ บาท

ซื้อลูกอมรสมะนาว $70-x$ เม็ด ราคา $\frac{70-x}{3}$ บาท

จากโจทย์ ซื้อลูกอมรวมเป็นเงินทั้งหมด 30 บาท

$$\therefore \frac{x}{2} + \frac{70-x}{3} = 30$$

นำ ค.ร.น คือ 6 คูณตลอดทั้งสมการ
เพื่อทำให้ส่วนเป็น 1

$$6\left(\frac{x}{2}\right) + 6\left(\frac{70-x}{3}\right) = 30(6)$$

$$3x + 2(70-x) = 6 \times 30$$

$$3x + 140 - 2x = 180$$

$$x = 180 - 140$$

$$\therefore x = 40$$

ตอบ มีลูกอมรสส้มจำนวน 40 เม็ด

แบบฝึกหัด 1.27

- 1) เชือกเส้นหนึ่งยาว 20 เมตร นำมาขดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยให้ด้านกว้างสั้นกว่าด้านยาว 2 เมตร จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

วิธีทำ จากโจทย์ เชือกยาว 20 เมตร

กำหนดให้ ความกว้าง = x เมตร

$$\text{ความยาว} = x + 2 \text{ เมตร}$$

เชือกยาว 20 เมตร = เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยม

สูตรเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยม = $2(\text{กว้าง}) + 2(\text{ยาว})$

$$20 = 2(x) + 2(x + 2)$$

$$20 = 2x + 2x + 4$$

$$20 = 4x + 4$$

$$20 - 4 = 4x$$

$$\frac{16}{4} = x$$

$$4 = x$$

$$\therefore \text{ความกว้าง} = x = 4 \text{ เมตร}$$

$$\text{ความยาว} = x + 2 = 4 + 2 = 6 \text{ เมตร}$$

สูตรพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง $\times$ ยาว

$$= 4 \times 6$$

$$= 24$$

ตอบ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้มีพื้นที่

24 ตารางเมตร

- 2) จงหาคำตอบของอสมการ $7(x + 3) - 5 \leq 4x + 8$

วิธีทำ $7(x + 3) - 5 \leq 4x + 8$

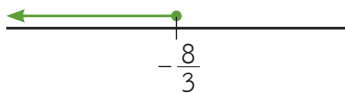
$$7x + 21 - 5 \leq 4x + 8$$

$$7x + 16 \leq 4x + 8$$

$$7x - 4x \leq 8 - 16$$

$$3x \leq -8$$

$$\therefore x \leq -\frac{8}{3}$$



ตอบ $x \leq -\frac{8}{3}$

แบบฝึกหัด 1.28

1) จงหาค่า x จากสมการ $3x^2 + 13x - 30 = 0$

วิธีทำ จาก $3x^2 + 13x - 30 = 0$ แยกตัวประกอบได้ $(3x - 5)(x + 6) = 0$

$$3x - 5 = 0 \quad \text{หรือ} \quad x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5}{3} \quad \text{หรือ} \quad x = -6$$

$$\therefore x = \frac{5}{3}, -6$$

ตอบ $x = \frac{5}{3}, -6$

2) กำลังสองของจำนวนเต็มบวกที่เรียงติดกัน 3 จำนวน มีค่ารวมกันได้ 2,891 จำนวนที่มากที่สุดมีค่าเท่าใด

วิธีทำ จากโจทย์ต้องรู้ว่าจำนวนคี่ที่เรียงติดกันมีค่าเพิ่มขึ้นทีละ 2 จึงจะกำหนดตัวแปรถูก

กำหนดให้ จำนวนคี่ที่เรียงติดกันทั้ง 3 จำนวนคือ $x, x + 2, x + 4$

จากโจทย์ เมื่อยกกำลังสองแต่ละจำนวนแล้วมาบวกกัน = 2,891

$$\therefore x^2 + (x + 2)^2 + (x + 4)^2 = 2,891$$

$$x^2 + (x^2 + 4x + 4) + (x^2 + 8x + 16) = 2,891$$

$$3x^2 + 12x + 20 = 2,891$$

$$3x^2 + 12x + 20 - 2,891 = 0$$

$$3x^2 + 12x - 2,871 = 0$$

$$x^2 + 4x - 957 = 0$$

$$(x + 33)(x - 29) = 0$$

$$x = -33 \quad \text{หรือ} \quad x = 29$$

จากโจทย์ $x =$ จำนวนเต็มบวก

จึงเลือก $x = 29$

ดังนั้น จำนวนคี่ที่มีค่ามากที่สุดคือ $x + 4$

$$x + 4 = 29 + 4$$

$$x + 4 = 33$$

ตอบ จำนวนที่มากที่สุดคือ 33

แบบฝึกหัด 1.29

จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้ พร้อมวาดกราฟ

$$2x + y = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x + 2y = 9 \quad \dots \textcircled{2}$$

วิธีทำ จาก $2x + y = 3$

หาจุดตัดแกน x แทนค่า $y = 0$

จุดตัดแกน x ; $2x + 0 = 3$

$$2x = 3$$

$$x = 1.5$$

$\therefore$ จุดตัดแกน x ; $(1.5, 0)$

หาจุดตัดแกน y แทนค่า $x = 0$

จุดตัดแกน y ; $2(0) + y = 3$

$$y = 3$$

$\therefore$ จุดตัดแกน y ; $(0, 3)$

ดังนั้น เส้นตรง $2x + y = 3$

ผ่านจุด $(1.5, 0)$ และ $(0, 3)$

จาก $x + 2y = 9$

หาจุดตัดแกน x แทนค่า $y = 0$

$\therefore$ จุดตัดแกน x ; $(9, 0)$

หาจุดตัดแกน y แทนค่า $x = 0$

$\therefore$ จุดตัดแกน y ; $(0, 4.5)$

ดังนั้น เส้นตรง $x + 2y = 9$

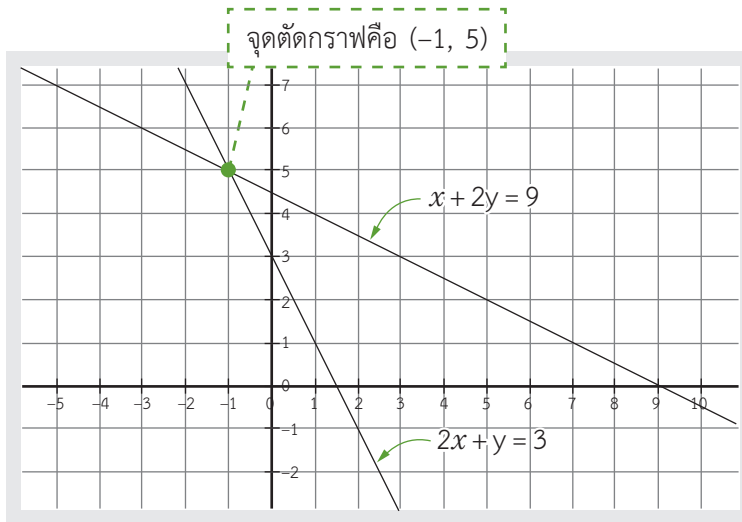
ผ่านจุด $(9, 0)$ และ $(0, 4.5)$

เมื่อได้จุดตัดแกน x และแกน y แล้วให้นำ

คำตอบที่ได้มาวาดกราฟ จุดตัดของทั้งสองกราฟ

คือคำตอบของสองสมการนี้

ตอบ $x = -1$ และ $y = 5$



แบบฝึกหัด 1.30

นักเรียนกลุ่มหนึ่งมี 8 คน ตกลงกันจะออกเงินซื้อต้นไม้ต้นหนึ่งราคา 300 บาท มาปลูกในโรงเรียนตามโครงการสวนสวยโรงเรียนงาม โดยนักเรียนชายและนักเรียนหญิงออกเงินฝ่ายละครึ่งของราคาค้นไม้ แต่นักเรียนชายออกเงินมากกว่านักเรียนหญิงคนละ 20 บาท ดังนั้นนักเรียนกลุ่มนี้จะมีนักเรียนหญิงมากกว่านักเรียนชายกี่คน

วิธีทำ จากโจทย์ ต้องกำหนดตัวแปร 2 ตัว แล้วสร้างสมการ 2 สมการ เพื่อหาค่าตัวแปรทั้งสอง กำหนดให้ นักเรียนหญิงมีจำนวน x คน และนักเรียนชายมีจำนวน y คน

จากโจทย์นักเรียนกลุ่มหนึ่งมี 8 คน $\therefore x + y = 8$

$$x = 8 - y \quad \dots (1)$$

จาก “นักเรียนชายและนักเรียนหญิงออกเงินฝ่ายละครึ่ง”

ต้นไม้ราคา 300 บาท นักเรียนชายและนักเรียนหญิงออกเงินฝ่ายละ $\frac{300}{2} = 150$ บาท

ดังนั้น นักเรียนชายออกเงินคนละ $\frac{150}{y}$ บาท

นักเรียนหญิงออกเงินคนละ $\frac{150}{x}$ บาท

จาก “นักเรียนชายออกเงินมากกว่านักเรียนหญิงคนละ 20 บาท”

$$\therefore \frac{150}{y} - \frac{150}{x} = 20 \quad \dots (2)$$

นำ ค.ร.น. คือ xy คูณทั้งสมการ เพื่อให้ส่วนหายไป

$$xy \left(\frac{150}{y} \right) - xy \left(\frac{150}{x} \right) = 20$$

$$150x - 150y = 20xy$$

แทนค่า $x = 8 - y$ ลงในสมการ

$$150(8 - y) - 150y = 20(8 - y)y$$

$$1,200 - 150y - 150y = (160 - 20y)y$$

$$1,200 - 300y = 160y - 20y^2$$

$$20y^2 - 160y + 1,200 - 300y = 0$$

$$20y^2 - 460y + 1,200 = 0$$

นำ 20 หารตลอดทั้งสมการ

$$y^2 - 23y + 60 = 0$$

$$(y - 20)(y - 3) = 0$$

$y = 20, 3$ เลือก $y = 3$ เพราะ y ต้องน้อยกว่า 8

แทนค่า $y = 3$ ลงในสมการ (1)

$$x = 8 - 3$$

$$x = 5$$

โจทย์ต้องการหาว่าผู้หญิงมากกว่าผู้ชายกี่คน

$$\therefore x - y = 5 - 3$$

$$x - y = 2$$

ตอบ มีนักเรียนหญิงมากกว่านักเรียนชาย
2 คน

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

- 1) สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีอัตราส่วนของความยาวฐานต่อความสูงเป็น 3 : 5 จะต้องลดความสูงลงกี่เซนติเมตร จึงจะทำให้อัตราส่วนของความยาวฐานต่อความสูงเปลี่ยนเป็น 2 : 3 ถ้าเดิมสามเหลี่ยมรูปนี้มีพื้นที่ 120 ตารางเซนติเมตร

วิธีทำ * อัตราส่วนที่โจทย์บอกคืออัตราส่วนอย่างต่ำ เมื่อไม่รู้ค่าคงที่เท่าไรคูณเข้าไป
จึงกำหนดให้เป็น a

$$\therefore \frac{\text{ความยาวฐาน}}{\text{ความสูง}} = \frac{3a}{5a}$$

$$\text{จากสูตรพื้นที่ } \Delta = \frac{1}{2} \times \text{ความยาวฐาน} \times \text{ความสูง}$$

หาความยาวฐาน และ ความสูงเดิม จากพื้นที่ 120 ตร.ซม.

$$120 = \frac{1}{2} \times 3a \times 5a$$

$$120 = \frac{15a^2}{2}$$

$$120 \times \frac{2}{15} = a^2$$

$$16 = a^2$$

$$a = 4, -4 \quad \text{เลือก 4 เพราะความยาวติดลบไม่ได้}$$

จาก $a = 4$ หาความยาวฐานและความสูงเดิม

$$\text{ความยาวฐาน} = 3a = 3(4) = 12 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\text{ความสูง} = 5a = 5(4) = 20 \text{ เซนติเมตร}$$

กำหนดให้ส่วนสูงลด b เซนติเมตร

$$\therefore \frac{\text{ความยาวฐาน}}{\text{ความสูงใหม่}} = \frac{12}{20-b} = \frac{2}{3}$$

$$12(3) = 2(20-b)$$

$$36 = 40 - 2b$$

$$2b = 4$$

$$b = 2$$

ตอบ ต้องลดความสูงลง 2 เซนติเมตร

- 2) ผลสอบกลางภาคของเด็กหญิงน้ำใสได้คะแนนดังต่อไปนี้ วิชาฟิสิกส์ได้ 15 คะแนน จาก 20 คะแนน วิชาชีววิทยาได้ 39 คะแนน จาก 50 คะแนน และวิชาเคมีได้ 18 คะแนน จาก 25 คะแนน จงหาว่าเด็กหญิงน้ำใสได้คะแนนวิชาอะไรดีที่สุด

วิธีทำ ต้องเทียบเป็น % ทุกวิชา

$$\text{วิชาฟิสิกส์ } \frac{15}{20} \times 100 = 75\%$$

$$\text{วิชาชีววิทยา } \frac{39}{50} \times 100 = 78\%$$

$$\text{วิชาเคมี } \frac{18}{25} \times 100 = 72\%$$

∴ วิชาชีววิทยาได้เปอร์เซ็นต์สูงที่สุดคือ 78%

ตอบ เด็กหญิงน้ำใสได้คะแนนวิชาชีววิทยาดีที่สุด

- 3) ทีมบาสเกตบอลของโรงเรียนแห่งหนึ่งแข่งขันชนะ 75% ของจำนวนครั้งที่ลงแข่งขัน ถ้าทีมนี้ลงแข่ง 24 ครั้ง แสดงว่าแพ้หรือเสมอรวมกันกี่ครั้ง

วิธีทำ กำหนด a คือจำนวนครั้งที่ชนะใน 24 การแข่งขัน

$$\text{เขียนเป็นสัดส่วนได้ดังนี้ } \frac{a}{24} = \frac{75}{100}$$

$$a = \frac{75}{100} \times 24$$

∴ a = 18 คือชนะทั้งหมด 18 ครั้ง

$$\text{จำนวนครั้งที่แพ้หรือเสมอ} = \text{แข่งทั้งหมด} - \text{ชนะ}$$

$$= 24 - 18 = 6 \text{ ครั้ง}$$

ตอบ จำนวนครั้งที่แพ้หรือเสมอคือ 6 ครั้ง

4) นายบอสเป็นพ่อค้าในตลาด ซื้อมะนาวมาขายที่ราคา 4 บาท 5 ผล แต่นำมะนาวล็อตนั้นมาขายที่ร้านตัวเองในราคา 5 บาท 4 ผล จงหาว่านายบอสได้กำไรร้อยละเท่าใด

วิธีทำ ต้นทุนมะนาว

มะนาว 5 ผล ราคา 4 บาท

มะนาว 1 ผล ราคา $\frac{4}{5} = 0.8$ บาท

ราคาขายมะนาว

มะนาว 4 ผล ราคา 5 บาท

มะนาว 1 ผล ราคา $\frac{5}{4} = 1.25$ บาท

$$\begin{aligned}\text{เปอร์เซ็นต์กำไร} &= \frac{\text{ราคาขาย} - \text{ต้นทุน}}{\text{ต้นทุน}} \times 100 \\ &= \frac{1.25 - 0.80}{0.80} \times 100 \\ &= \frac{0.45}{0.80} \times 100 \\ &= 56.25\end{aligned}$$

ตอบ ร้อยละ 56.25

- 5) ซื้อส้มเขียวหวานมา 2 ชนิด ชนิดแรกราคา กิโลกรัมละ 9 บาท ชนิดที่สองราคา กิโลกรัมละ 13.50 บาท นำมาคละกัน แล้วขายไป กิโลกรัมละ 12 บาท ได้กำไร 20% จงหาอัตราส่วนการผสม

วิธีทำ ต้องกำหนด 2 ตัวแปร เพื่อหาสัดส่วนระหว่าง 2 ตัวแปรที่กำหนด

กำหนดให้ ซื้อส้มชนิดแรกมา x กิโลกรัม

ราคา 9 บาทต่อกิโลกรัม $\therefore$ ต้นส้มชนิดแรก = $9x$ บาท

กำหนดให้ ซื้อส้มชนิดที่สองมา y กิโลกรัม

ราคา 13.5 บาทต่อกิโลกรัม $\therefore$ ต้นส้มชนิดที่สอง = $13.5y$ บาท

$\therefore$ จำนวนส้มรวม = $x + y$ กิโลกรัม

ทุนรวม = $9x + 13.5y$ บาท

จากโจทย์บอกนำมาคละกัน แล้วขาย 12 บาทต่อกิโลกรัม

$\therefore$ ราคาขายส้มรวม = $12(x + y)$

แต่โจทย์บอกขายได้กำไร 20%

ราคาขายคิดเป็น % จากทุน = $100 + 20 = 120\%$

$\therefore$ ราคาขายส้มรวม = $\frac{120}{100} \times (9x + 13.5y)$

ดังนั้น $12(x + y) = \frac{120}{100} \times (9x + 13.5y)$

$$12x + 12y = 1.2 \times (9x + 13.5y)$$

$$12x + 12y = 10.8x + 16.2y$$

$$12x - 10.8x = 16.2y - 12y$$

$$1.2x = 4.2y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{4.2}{1.2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3.5}{1}$$

$\therefore$ อัตราส่วนผสมส้มสองชนิด = $3.5 : 1$

ตอบ **3.5 : 1**

6) ช้างขับรถได้ระยะทาง 36 กิโลเมตรในเวลาครึ่งชั่วโมง ส่วนเอกซ์บริดจ์ที่ความเร็ว 15 เมตรต่อวินาที จงหาว่าช้างหรือเอกซ์บริดจ์ได้ขับรถด้วยอัตราเร็วมากกว่ากันในหน่วยเมตรต่อวินาที

วิธีทำ จากโจทย์อัตราเร็วที่ช้างขับรถ = $\frac{36 \text{ กิโลเมตร}}{0.5 \text{ ชั่วโมง}}$

เปลี่ยนหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที $\frac{36}{0.5} \times \frac{5}{18} = 20$ เมตรต่อวินาที

จากโจทย์อัตราเร็วที่เอกซ์บริดจ์ = 15 เมตรต่อวินาที

$\therefore$ อัตราเร็วของช้าง > อัตราเร็วของเอก

ตอบ ช้างขับรถเร็วกว่าเอกซ์บริดจ์ด้วยอัตราเร็ว 20 เมตรต่อวินาที

7) หนอยมีเงินอยู่ 20,000 บาท นำไปฝากธนาคารได้ดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี กับนำไปให้แม่ค้าที่ตลาดกู้โดยคิดดอกเบี้ยร้อยละ 1 ต่อเดือนและเก็บดอกเบี้ยเป็นรายเดือน ในเวลา 2 ปี แต่ละกรณีจะให้รายได้แก่หนอยแตกต่างกันเท่าไร

วิธีทำ กรณีนำเงินไปฝากจะได้ดอกเบี้ย

$$20,000 \times 0.08 \times 2 = 3,200 \text{ บาท}$$

กรณีปล่อยเงินกู้จะได้ดอกเบี้ย

$$20,000 \times 0.01 \times 12 \times 2 = 4,800 \text{ บาท}$$

ตอบ การปล่อยเงินกู้สร้างรายได้ให้แก่หนอยมากกว่าการนำไปฝาก

$$4,800 - 3,200 = 1,600 \text{ บาท}$$

8) เด็กคนหนึ่งเดินจากบ้านไปสถานีรถไฟเพื่อไปโรงเรียน เขาพบว่าถ้าเดินทางด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 3.5 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะต้องรอรถไฟ 30 นาที แต่ถ้าเดินทางจากบ้านด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เขาจะถึงสถานีช้ากว่ารถไฟมา 45 นาที จงหาว่าบ้านของเขาอยู่ห่างจากสถานีรถไฟกี่กิโลเมตร

วิธีทำ กำหนดให้ระยะทางจากบ้านถึงสถานีรถไฟเป็น s เวลาที่รถไฟมาถึงเป็น a

$$\text{จะได้ } s = 3.5(a - 0.5) \text{ ---- ①}$$

$$\text{และ } s = 3(a + \frac{3}{4}) \text{ ---- ②}$$

$$\text{นำสมการ ①} = \text{②}$$

$$\text{จะได้ } 3.5(a - 0.5) = 3(a + \frac{3}{4})$$

$$3.5a - 1.75 = 3a + 2.25$$

$$0.5a = 1.75 + 2.25$$

$$a = 8$$

ตอบ บ้านอยู่ห่างจากสถานีรถไฟ $3.5(8 - 0.5) = 26.25$ กิโลเมตร

9) รถยนต์คันหนึ่งแล่นด้วยอัตราเร็วคงที่ 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จากกรุงเทพไปสุรินทร์ระยะทางประมาณ 420 กิโลเมตร จะใช้เวลานานกี่ชั่วโมงและนาที

วิธีทำ จากสมการ ระยะทาง = อัตราเร็ว $\times$ เวลา

$$\text{จะได้ } 420 = 90t$$

$$t = \frac{420}{90}$$

$$= 4 \text{ ชั่วโมง } 40 \text{ นาที}$$

ตอบ รถแล่นจากกรุงเทพไปสุรินทร์ 4 ชั่วโมง 40 นาที

10) ก และ ข อยู่ห่างกัน 100 กิโลเมตร ออกเดินทางพร้อมกันโดยหันหน้าเข้าหากัน โดย ก หยุดพัก 2 ชั่วโมงแล้วเดินทางต่อ ทั้งนี้ ก และ ข เดินทางด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 4 และ 5 กิโลเมตรต่อชั่วโมงตามลำดับ เมื่อพบกัน ข เดินทางได้กี่กิโลเมตร



วิธีทำ ก หยุดพักชั่วคราว 2 ชั่วโมง ทำให้ ข เดินทางเป็นระยะทาง $5 \times 2 = 10$ กิโลเมตร
ทำให้ตอนนี้ทั้ง 2 คนอยู่ห่างกัน 90 กิโลเมตร
กำหนดให้ ระยะทางที่ทั้งสองเจอกันเป็น s กิโลเมตร

เวลาเป็น t ชั่วโมง

จะได้ ก เดินทาง $s - 90 = 4 \times t$ ----①

ข เดินทาง $s = 5 \times t$ ----②

แทนสมการ ② ลงในสมการ ①

จะได้ $5t - 90 = 4t$

$t = 90$ ชั่วโมง

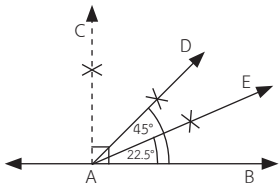
ตอบ เมื่อพบกัน ข จะเดินทางได้ $10 + (90 \times 5) = 460$ กิโลเมตร

เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 2

แบบฝึกหัด 2.1 ลองสร้างมุมต่อไปนี้

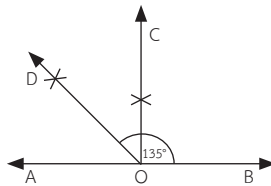
1) 22.5°

แนวคิด $22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$ และ $45^\circ = \frac{90^\circ}{2}$



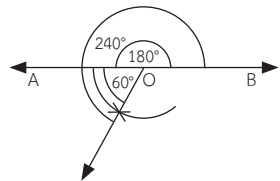
2) 135°

แนวคิด $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$



3) 240°

แนวคิด $240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$



แบบฝึกหัด 2.2

1) จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว MNO เมื่อกำหนดให้ MN เป็นฐานยาว a หน่วย และมุมที่ฐานมีขนาด 30°

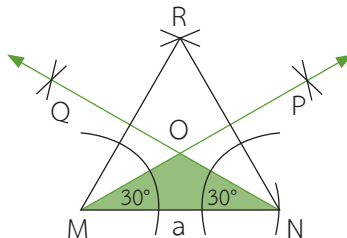
วิธีทำ - สร้าง $\overline{MN}$ ยาว a หน่วย

- สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า MNR จะได้ $\hat{NMR} = \hat{MNR} = 60^\circ$

- สร้าง $\overline{MP}$ ให้แบ่งครึ่ง $\hat{NMR}$ จะได้ $\hat{NMP} = 30^\circ$

- สร้าง $\overline{NQ}$ ให้แบ่งครึ่ง $\hat{MNR}$ จะได้ $\hat{MNQ} = 30^\circ$

- ให้จุดตัดของ $\overline{MP}$ และ $\overline{NQ}$ คือจุด O จะได้รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว MNO ตามต้องการ



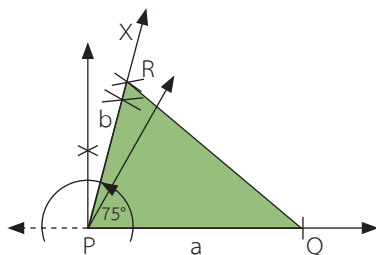
2) จงสร้างรูปสามเหลี่ยม โดยให้มุมมุมหนึ่งมีขนาด 75° และด้านประกอบมุมนั้นยาว a และ b หน่วย

วิธีทำ - สร้าง $\overline{PQ}$ ยาว a หน่วย

- สร้าง $\angle QPX$ ให้มีขนาด 75°

- สร้าง $\overline{PR}$ ยาว b หน่วย

- ลาก QR จะได้รูปสามเหลี่ยม PQR ขนาด 75° ตามต้องการ

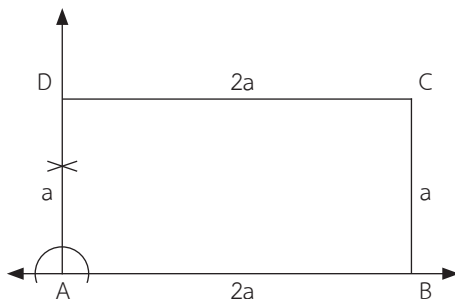


แบบฝึกหัด 2.3

กำหนดให้ส่วนของเส้นตรงยาว a หน่วย

จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้างและความยาวเป็น a หน่วย และ $2a$ หน่วยตามลำดับ

วิธีทำ



แบบฝึกหัด 2.4

รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาว 20 นิ้ว 21 นิ้ว และ 28 นิ้ว ตามลำดับ จงตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ หากไม่ใช่ แล้วเป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $a = 20$, $b = 21$, $c = 28$

หากแทนค่าในสมการพีทาโกรัสแล้วเป็นจริง จะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$28^2 = 20^2 + 21^2$$

$$784 = 400 + 441$$

$$784 \neq 841 \quad \therefore \text{สมการไม่เป็นจริง}$$

จากการพิสูจน์ ได้ $c^2 < a^2 + b^2$

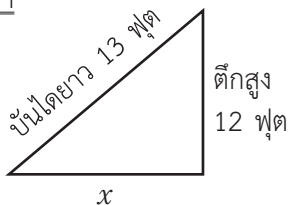
$\therefore$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมตามข้อควรรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนของสามเหลี่ยม

ตอบ รูปสามเหลี่ยมนี้ไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แต่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม

แบบฝึกหัด 2.5

1) วางบันไดยาว 13 ฟุต พาดกับกำแพงตึกสูง 12 ฟุต จงหาว่าโคนบันไดอยู่ห่างจากฐานตึกเท่าไร

วิธีทำ



$$\text{จาก } 13^2 = x^2 + 12^2$$

$$x^2 = 13^2 - 12^2$$

$$x^2 = 169 - 144$$

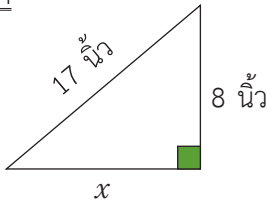
$$x^2 = 25$$

$$\therefore x = 5$$

ตอบ โคนบันไดอยู่ห่างจากฐานตึก 5 ฟุต

2) เราใช้ความยาวของเส้นทแยงมุมของหน้าจอโทรทัศน์เพื่อบอกขนาดของโทรทัศน์ โดยโทรทัศน์เครื่องหนึ่งวัดตามแนวเส้นทแยงมุมได้ 17 นิ้ว ถ้าหน้าจอโทรทัศน์สูง 8 นิ้ว จงหาว่าหน้าจอโทรทัศน์นี้ยาวเท่าไร

วิธีทำ



$$\text{จาก } 17^2 = x^2 + 8^2$$

$$x^2 = 17^2 - 8^2$$

$$x^2 = 289 - 64$$

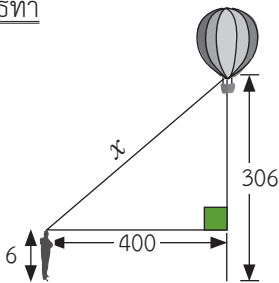
$$x^2 = 225$$

$$\therefore x = 15$$

ตอบ หน้าจอโทรทัศน์นี้ยาว 15 นิ้ว

3) เด็กคนหนึ่งสูง 6 ฟุต ยืนอยู่ห่างจากจุดปล่อยบอลลูน 400 ฟุต บอลลูนลอยขึ้นไปจากจุดปล่อย 306 ฟุต จงหาว่าศีรษะเด็กคนนั้นอยู่ห่างจากบอลลูนกี่ฟุต

วิธีทำ



ความสูงของรูปสามเหลี่ยม คือ $306 - 6 = 300$ ฟุต

$$\text{จาก } x^2 = 300^2 + 400^2$$

$$x^2 = 90,000 + 160,000$$

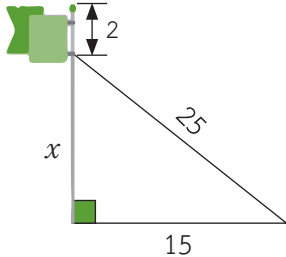
$$x^2 = 250,000$$

$$\therefore x = 500$$

ตอบ ศีรษะเด็กคนนั้นอยู่ห่างจากบอลลูน 500 ฟุต

- 4) เสาธงหนึ่งใช้เชือกผูกที่จุดซึ่งห่างจากยอด 2 ฟุต แล้วดึงมาผูกที่หลักซึ่งอยู่ห่างโคนเสา 15 ฟุต ถ้าเชือกยาว 25 ฟุต เสาธงนี้สูงกี่ฟุต

วิธีทำ



$$\text{จาก } 25^2 = x^2 + 15^2$$

$$x^2 = 25^2 - 15^2$$

$$x^2 = 625 - 225$$

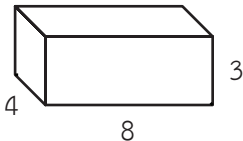
$$x^2 = 400$$

$$\therefore x = 20$$

ตอบ เสาธงสูง $20 + 2 = 22$ ฟุต

แบบฝึกหัด 2.6 จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตร

1)



วิธีทำ ความยาวรอบฐาน $= 2(4) + 2(8) = 24$ หน่วย

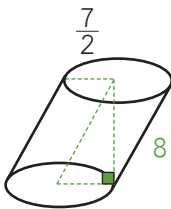
พื้นที่ผิวข้าง $= 24 \times 3 = 72$ ตารางหน่วย

พื้นที่ฐาน $= 8 \times 4 = 32$ ตารางหน่วย

$\therefore$ พื้นที่ผิว $= 72 + 2(32) = 136$ ตารางหน่วย

$\therefore$ ปริมาตร $= 32 \times 3 = 96$ ลูกบาศก์หน่วย

2)



วิธีทำ ความยาวรอบฐาน $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} = 22$ หน่วย

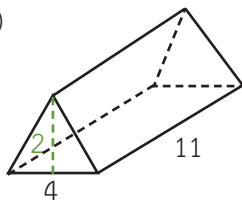
พื้นที่ผิวข้าง $= 22 \times 8 = 176$ ตารางหน่วย

พื้นที่ฐาน $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = 38.5$ ตารางหน่วย

$\therefore$ พื้นที่ผิว $= 176 + 2(38.5) = 253$ ตารางหน่วย

$\therefore$ ปริมาตร $= 38.5 \times 8 = 308$ ลูกบาศก์หน่วย

3)



**เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

วิธีทำ ความยาวรอบฐาน = $3(4) = 12$ หน่วย

พื้นที่ผิวข้าง = $12 \times 11 = 132$ ตารางหน่วย

พื้นที่ฐาน = $\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$ ตารางหน่วย

$\therefore$ พื้นที่ผิว = $132 + 2(4) = 140$ ตารางหน่วย

$\therefore$ ปริมาตร = $4 \times 11 = 44$ ลูกบาศก์หน่วย

แบบฝึกหัด 2.7 จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตร

- 1) กรวยกลมอันหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานยาว 14 นิ้ว สูงเอียง 25 นิ้ว จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตร

วิธีทำ สูตรหาพื้นที่ผิวของกรวย = $\pi r(l + r)$

$$\text{จะได้} = \frac{22}{7} \times 7 (25 + 7)$$

$$= 22 \times 32 \text{ ตารางนิ้ว}$$

$$= 704 \text{ ตารางนิ้ว}$$

เนื่องจากเส้นผ่านศูนย์กลาง = 14 นิ้ว

$$\text{จะได้ } r = 7 \text{ นิ้ว}$$

และหา h ได้จากสูตรพีทาโกรัส

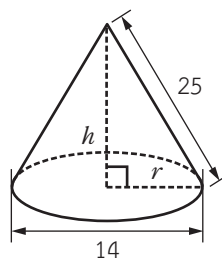
$$25^2 = 7^2 + h^2 \quad h^2 = 576$$

$$h^2 = 625 - 49 \quad \therefore h = 24$$

สูตรหาปริมาตรของกรวย = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

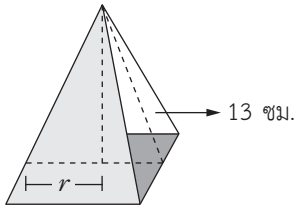
$$\text{จะได้} = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$$

$$= 1,232 \text{ ลูกบาศก์นิ้ว}$$



ตอบ พื้นที่ผิวเท่ากับ 704 ตารางนิ้ว

และปริมาตรเท่ากับ 1,232 ลูกบาศก์นิ้ว



2) พีระมิดตรงฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีพื้นที่ฐาน 100 ตารางเซนติเมตร สูงเอียง 13 เซนติเมตร พีระมิดนี้จะมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

วิธีทำ สูตรปริมาตรของพีระมิดคือ $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูงตรง}$
 ดังนั้น ต้องหาสูงตรงจากสูตรพีทาโกรัส
 จะได้ $13^2 = r^2 + \text{สูงตรง}^2$

จะเห็นว่า ติดตัวแปร 2 ตัว จึงต้องหาค่า r จากพื้นที่ฐานที่โจทย์กำหนดก่อน
 พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = ด้าน $\times$ ด้าน

$$100 = \text{ด้าน}^2$$

$$\text{ด้าน} = 10$$

$$\therefore r = \frac{10}{2} = 5$$

$$\therefore r = 5 \text{ เซนติเมตร}$$

นำค่า r ไปแทนในสูตรพีทาโกรัส

$$\text{จะได้ } 13^2 = 5^2 + \text{สูงตรง}^2$$

$$169 = 25 + \text{สูงตรง}^2$$

$$\text{สูงตรง}^2 = 144$$

$$\therefore \text{สูงตรง} = 12 \text{ เซนติเมตร}$$

นำค่าสูงตรงไปแทนในสมการหาปริมาตร

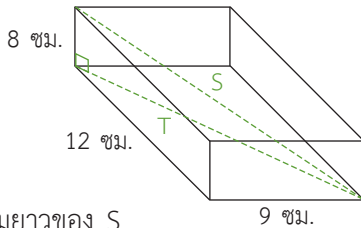
$$\text{จะได้ } = \frac{1}{3} \times 100 \times 12$$

$$= 400$$

ตอบ ปริมาตรเท่ากับ 400 ลูกบาศก์เซนติเมตร

แบบฝึกหัด 2.8

1) กล่องใบหนึ่งมีความกว้าง ความยาว และความสูงดังรูป



จงหาความยาวของ S

วิธีทำ ค่า S เป็นเส้นทแยงมุมที่ยาวที่สุดในกล่องสี่เหลี่ยม หาได้จากสูตร

$$S = \sqrt{\text{กว้าง}^2 + \text{ยาว}^2 + \text{สูง}^2}$$

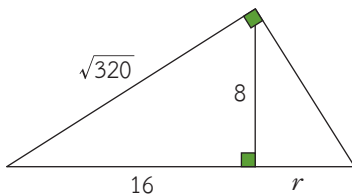
$$S = \sqrt{9^2 + 12^2 + 8^2}$$

$$S = \sqrt{81 + 144 + 64}$$

$$S = \sqrt{289} = 17$$

ตอบ $S = 17$ เซนติเมตร

2) จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ จงหาความยาวของ r



วิธีทำ เนื่องจากเป็นเส้นที่ลากมาตั้งฉากกับด้านตรงข้ามมุมฉาก

ใช้สมการ $h^2 = XY$

แทนค่า $8^2 = 16r$

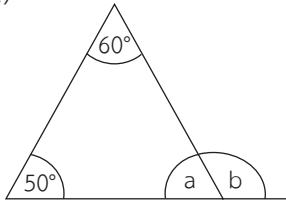
$$64 = 16r$$

$$r = 4$$

ตอบ $r = 4$ หน่วย

แบบฝึกหัด 2.9

1)



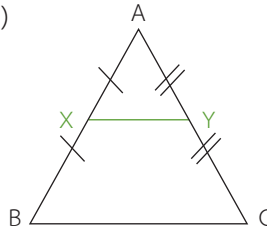
$$a = 70^\circ$$

เนื่องจากสมบัติของ
รูปสามเหลี่ยมข้อที่ 1

$$b = 110^\circ$$

เนื่องจากสมบัติของ
รูปสามเหลี่ยมข้อที่ 2 หรือ
ตามนิยามของมุมตรง

2)

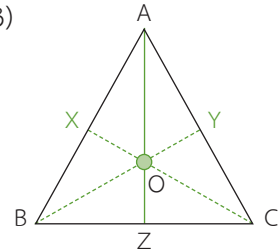


ให้ความยาว $\overline{XY} = 6$ ซม.

ความยาว $\overline{BC} = 12$ ซม.

เพราะ $\overline{XY}$ ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ
 $\overline{BC}$ ตามสมบัติของ
รูปสามเหลี่ยมข้อที่ 3

3)



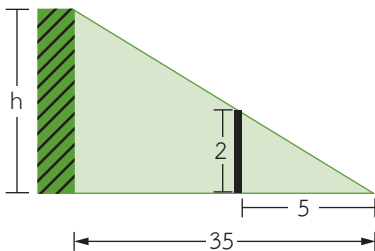
เส้นมัธยฐาน ได้แก่
 $\overline{AZ}$, $\overline{BY}$, $\overline{CX}$

ให้ความยาว $\overline{OZ} = 5$ ซม.
ความยาว $\overline{AO} = 10$ ซม.

เนื่องจากสมบัติของรูป
สามเหลี่ยมข้อที่ 4

แบบฝึกหัด 2.10

1) ชายคนหนึ่งเห็นเงาของตึกทอดยาวไป 35 เมตร ขณะที่เสาต้นหนึ่งสูง 2 เมตร ทอดเงาไปทางเดียวกันยาว 5 เมตร อยากทราบว่าตึกสูงเท่าใด



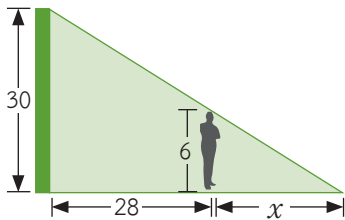
วิธีทำ กำหนดให้ ความสูงของตึก = h เมตร

เขียนสมการอัตราส่วนของความยาวด้านคู่สมนัย

$$\begin{aligned} \text{ได้ } \frac{h}{2} &= \frac{35}{5} & \left| \quad h &= \frac{35 \times 2}{5} \right. \\ h &= \frac{35 \times 2}{5} & \left. \therefore h &= 7 \times 2 = 14 \right. \end{aligned}$$

ตอบ ตึกสูง 14 เมตร

2) นายภูมิสูง 6 ฟุต ยืนห่างจากเสาไฟฟ้า 28 ฟุต ถ้าเสาไฟฟ้าสูง 30 ฟุต จงหาความยาวของเงาของนายภูมิคนนี้อย่างยาวเท่าใด



วิธีทำ กำหนดให้ เสาของนายภูมิ = x เมตร

เขียนสมการอัตราส่วนของความยาวด้านคู่สมนัย

$$\text{ได้ } \frac{6}{30} = \frac{x}{x+28}$$

$$6(x+28) = 30x$$

$$6x + 168 = 30x$$

$$30x - 6x = 168$$

$$24x = 168$$

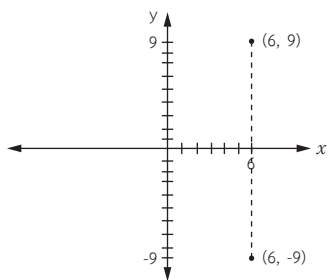
$$\therefore x = 7$$

ตอบ เสาของนายภูมิยาว 7 เมตร

แบบฝึกหัด 2.11

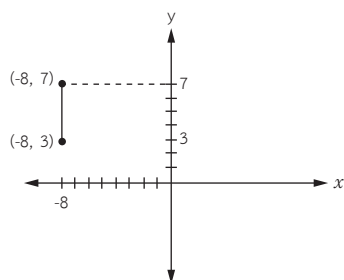
1) จงบอกว่าแต่ละข้อเป็นการเลื่อนขนาน การสะท้อน หรือการหมุน

การหมุน	ชิงช้าสวรรค์
การหมุน	เข็มนาฬิกาที่กำลังเดิน
การเลื่อนขนาน	รถไฟที่แล่นตรงไป
การสะท้อน	เงาของต้นไม้ในลำธาร
การหมุน	ลูกบอลกำลังกลิ้งไป
การหมุน	ใบพัดของพัดลมกำลังทำงาน
การเลื่อนขนาน	ยกเก้าอี้ขึ้นวางบนโต๊ะ
การหมุน	การเปิดหน้าต่าง



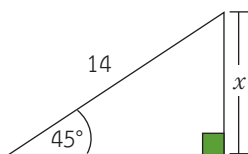
2) เมื่อสะท้อนจุด $(6, -9)$ กับแกน x จะได้จุดใด
 $(6, 9)$

3) เลื่อนจุด $(-8, 3)$ ขึ้นบน 4 หน่วยจะได้จุดใด
 $(-8, 7)$



แบบฝึกหัด 2.12

จงหาค่า x



วิธีทำ จาก $\sin 45^\circ = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม } 45^\circ}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{x}{14}$

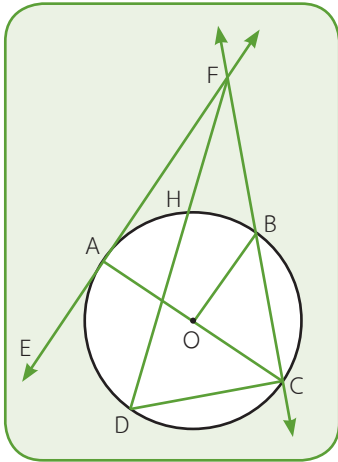
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{14}$$

$$\frac{14 \times \sqrt{2}}{2} = x$$

$$7\sqrt{2} = x$$

ตอบ $7\sqrt{2}$ หน่วย

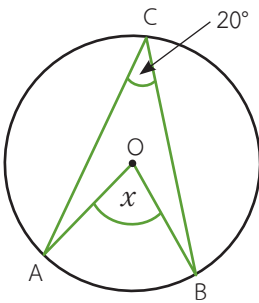
แบบฝึกหัด 2.13 จากรูป จงบอกชื่อส่วนต่าง ๆ
ที่เกี่ยวข้องกับวงกลม O ดังนี้



- 1) เส้นผ่านศูนย์กลาง คือ $\overline{AC}$
- 2) รัศมี คือ $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$
- 3) คอร์ด คือ $\overline{DH}$, $\overline{DC}$, $\overline{BC}$
- 4) คอร์ดที่ยาวที่สุด คือ $\overline{AC}$
- 5) เส้นสัมผัสวงกลม คือ $\overrightarrow{EF}$
- 6) เส้นตัดวงกลม คือ $\overline{CF}$
- 7) ส่วนโค้งที่เป็นครึ่งวงกลม คือ ส่วนโค้ง $\overline{AC}$

แบบฝึกหัด 2.14

- 1) จากรูป จงหาค่า x โดยกำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม



วิธีทำ จากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า

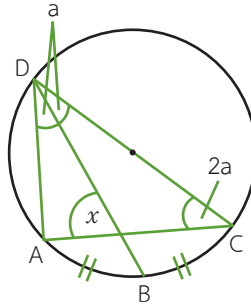
$$x = 2(\angle ACB)$$

$$x = 2(20^\circ)$$

$$x = 40^\circ$$

ตอบ x เท่ากับ 40°

- 2) กำหนดให้ CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และ B เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AC
ถ้า $\angle ACD = 2\angle BDC$ จงหาค่า x



- วิธีทำ
- 1) $\angle ADB = \angle BDC = a$
 - 2) $\angle ACD = 2\angle BDC = 2a$
 - 3) $\angle CAD + \angle ADC + \angle ACD = 180^\circ$
 - 4) $90^\circ + (a + a) + 2a = 180^\circ$
 - 5) $a = \frac{180^\circ - 90^\circ}{4} = \frac{45^\circ}{2}$
 - 6) $x = a + 2a$

$$x = 3a = 3\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = 67.5^\circ$$

มุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่เท่ากัน
จาก 1)

ผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม
แทนค่า

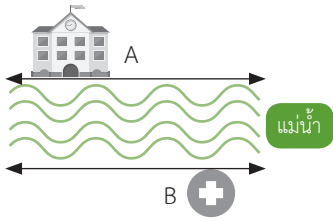
แก้สมการ

มุมภายนอก = ผลบวกมุมภายในที่ไม่ประชิด
แทนค่า

ตอบ x เท่ากับ 67.5°

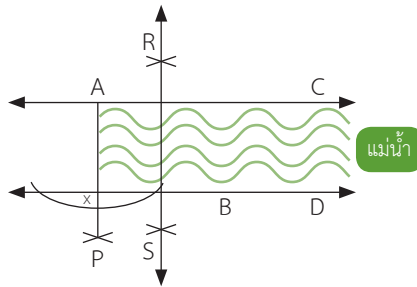
เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

- 1) โรงเรียนและโรงพยาบาลตั้งอยู่คนละฟากของริมฝั่งแม่น้ำซึ่งขนานกันที่จุด A และ B ตามลำดับ จากแผนภาพ ต้องการสร้างสะพานข้ามแม่น้ำ โดยให้แนวสะพานตั้งฉากกับริมฝั่งแม่น้ำทั้งสอง และอยู่ห่างจากโรงเรียนและโรงพยาบาลเป็นระยะทางเท่ากัน จงหาตำแหน่งที่จะสร้างสะพานดังกล่าว



ให้ริมฝั่งแม่น้ำ คือ $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ ดังรูป
วิธีหาตำแหน่งที่จะสร้างสะพานทำได้ดังนี้

1. สร้าง $\overline{AP}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overline{BD}$ ที่จุด X
2. สร้าง $\overline{RS}$ ให้แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $\overline{XB}$
จะได้ $\overline{RS}$ เป็นแนวเส้นตรงที่จะสร้างสะพาน



2) รูป $\triangle ABC$ มีมุม A เป็น 6 เท่าของมุม C และ 2 เท่าของมุม B ใหญ่กว่า 2 เท่าของมุม B อยู่ 30° อยากทราบว่ามุม A กางกี่องศา

วิธีทำ จากโจทย์แปลงเป็นสมการได้ ดังนี้ $A = 6C$ — ①

$$2A - 2B = 30^\circ \text{ — ②}$$

จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมข้อที่ 1; $A + B + C = 180^\circ$ — ③

แทน ① ใน ③; $7C + B = 180^\circ$ — ④

แทน ① ใน ②; $2(6C) - 2B = 30^\circ$

$$12C - 2B = 30^\circ \text{ — ⑤}$$

นำ ④ $\times 2$; $14C + 2B = 360^\circ$ — ⑥

นำ ⑤ + ⑥; $26C = 390^\circ$

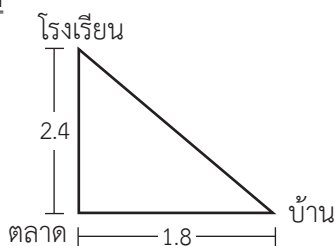
$$C = 15^\circ$$

นำค่า C แทนใน ①; $A = 90^\circ$

ตอบ มุม A กาง 90°

3) จากแผนผังกำหนดตำแหน่งที่ตั้งบ้านของแสงดาว ตลาดและโรงเรียน เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ตลาดอยู่ห่างจากบ้านของแสงดาว 1.8 กิโลเมตร และอยู่ห่างจากโรงเรียน 2.4 กิโลเมตร ทุก ๆ วันหลังเลิกเรียน แสงดาวจะต้องขี่จักรยานไปแวะซื้อข้าวที่ตลาดก่อนกลับบ้าน แต่ในตอนเช้าแสงดาวจะขี่จักรยานตรงไปโรงเรียน โดยไม่ผ่านตลาด จงหาว่าในแต่ละวันแสงดาวขี่จักรยานเป็นระยะทางกี่กิโลเมตร

วิธีทำ



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = (1.8)^2 + (2.4)^2$$

$$c^2 = 3.24 + 5.76$$

$$c^2 = 9$$

$$c = 3$$

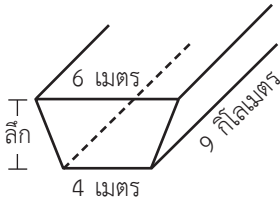
$\therefore$ ระยะทางจากบ้านของแสงดาวไปโรงเรียนยาว 3 กิโลเมตร

นำ $a + b + c$ จะได้ระยะทางที่แสงดาวขี่จักรยานในแต่ละวัน

ตอบ แต่ละวันแสงดาวปั่นจักรยานเป็นระยะทาง 7.2 กิโลเมตร

4) คลองประปา มีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ดังรูป การสร้างคลองประปายาว 9 กิโลเมตร จะต้องขุดดินออกไปคิดเป็นปริมาตร 157,500 ลูกบาศก์เมตร คลองประปานี้มีความลึกกี่เมตร

วิธีทำ



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2} \times \text{สูง} \times \text{ผลบวกของด้านคู่ขนาน}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่หน้าตัดของคลองประปา} &= \frac{1}{2} \times \text{สูง} \times (6 + 4) \\ &= \frac{1}{2} \times \text{สูง} \times 10 \\ &= \text{สูง} \times 5 \end{aligned}$$

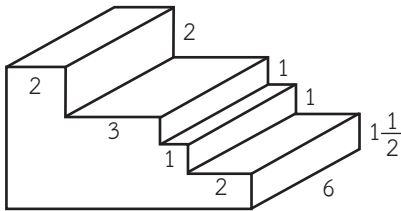
ปริมาตรของปริซึมสี่เหลี่ยมคางหมู = $\text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง}$

$$\text{นั่นคือ } 157,500 = (\text{สูง} \times 5) \times 9,000$$

$$\text{สูง} = \frac{157,500}{5 \times 9,000} = \frac{7}{2}$$

ตอบ คลองประปานี้มีความลึก 3.5 เมตร

5)



จงหาปริมาตรของรูปนี้

วิธีทำ ปริมาตร = $\text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง}$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ฐาน} &= \left(\frac{3}{2} \times 2\right) + \left(\frac{5}{2} \times 1\right) + \left(\frac{7}{2} \times 3\right) + \left(\frac{11}{2} \times 2\right) \\ &= 27 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

$$\text{ปริมาตร} = 27 \times 6 = 162 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

ตอบ ปริมาตร 162 ลูกบาศก์หน่วย

6) จงหรัศมีและปริมาตรของทรงกลมซึ่งมีพื้นที่ผิว 144π ตารางเซนติเมตร (กำหนดให้ $\pi = \frac{22}{7}$)
วิธีทำ เนื่องจาก พื้นที่ผิวทรงกลมเท่ากับ $4\pi r^2$

$$\text{จะได้ } 144\pi = 4\pi r^2$$

$$\frac{144\pi}{4\pi} = r^2$$

$$r^2 = 36$$

$$r = 6 \text{ เซนติเมตร}$$

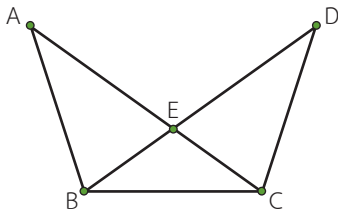
เนื่องจาก ปริมาตรของทรงกลมเท่ากับ $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$\text{ปริมาตรของทรงกลม} = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 6$$

$$= 905.14 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

ตอบ รัศมีและปริมาตรของทรงกลมคือ 6 เซนติเมตรและ 905.14 ลูกบาศก์เซนติเมตร
 ตามลำดับ

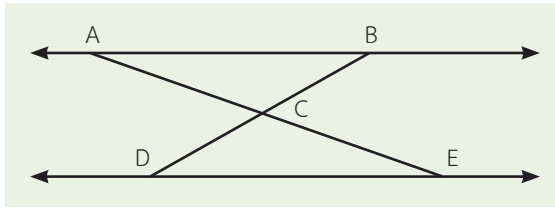
7)



กำหนดให้ $\overline{AC} = \overline{DB}$, มุม BAE = มุม CDE, $\overline{AB} = \overline{DC}$,
 จงพิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยม BEC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ลำดับที่	ข้อความ	เหตุผล
1	$\overline{AC} = \overline{DB}$	กำหนดให้
2	มุม BAE = มุม CDE	กำหนดให้
3	$\overline{AB} = \overline{DC}$	กำหนดให้
4	$\triangle ABC = \triangle DCB$	ด้าน - มุม - ด้าน
5	มุม ACB = มุม DBC	จากข้อ 4
6	$\triangle BEC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	มีมุมภายในเท่ากัน 2 มุม

8) จากรูป รูปสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปคล้ายกันหรือไม่ และบอกมุมคู่ที่เท่ากัน โดยกำหนดให้ $\vec{AB} // \vec{DE}$



วิธีทำ

$$\hat{BAC} = \hat{DEC} \quad (\text{มุมแย้ง})$$

$$\hat{ABC} = \hat{EDC} \quad (\text{มุมแย้ง})$$

$$\hat{ACB} = \hat{DCE} \quad (\text{มุมตรงข้ามของเส้นตรงตัดกัน})$$

รูปสามเหลี่ยมคู่นี้คล้ายกัน

9) จุดยอดของรูป $\triangle PQR$ คือ $P(-3, 2)$ $Q(1, 4)$ และ $R(3, 1)$ จงสร้างรูป $\triangle PQR$ แล้ววาดรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการเลื่อนขนานไปทางขวา 4 หน่วย และขึ้นบน 3 หน่วย

วิธีทำ หาค่าพิกัดจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมใหม่ ดังนี้

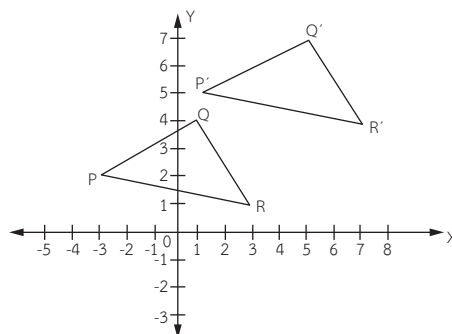
จุดยอดเดิม $\rightarrow$ ไปทางขวา 4 หน่วย $\rightarrow$ ขึ้นบน 3 หน่วย $\rightarrow$ จุดยอดใหม่

$$P(-3, 2) + (4, 3) \Rightarrow P'(1, 5)$$

$$Q(1, 4) + (4, 3) \Rightarrow Q'(5, 7)$$

$$R(3, 1) + (4, 3) \Rightarrow R'(7, 4)$$

พิกัดของจุดยอดใหม่คือ $P'(1, 5)$, $Q'(5, 7)$, $R'(7, 4)$



10) จงตอบคำถามต่อไปนี้

10.1) จงหาค่าของ $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ \tan 30^\circ$

วิธีทำ $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ \tan 30^\circ = 2\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
 $= 1 \times \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2}$

ตอบ $\frac{1}{2}$

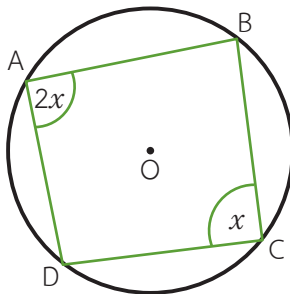
10.2) จงหาค่าของ x จากสมการ $x\sin 30^\circ \cos 60^\circ = 6$

วิธีทำ $x\sin 30^\circ \cos 60^\circ = 6$

$$x\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = 6$$
$$\frac{1}{4}x = 6$$
$$x = 24$$

ตอบ $x = 24$

11) จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาค่า x



วิธีทำ 1) $2x + x = 180^\circ$ ทฤษฎีบทที่ 8
2) $3x = 180^\circ$ แก่สมการ

ตอบ $x = 60^\circ$

เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 3

แบบฝึกหัด 3.1

จากข้อมูลผลการสอบวิชาวิทยาศาสตร์ปลายภาคของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2/1 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง

21 15 27 35 10 9 41 28 20 14
26 33 37 45 8 16 24 30 31 19
11 14 16 20 24 28 39 40 48 16

จงสร้างตารางแจกแจงความถี่ที่มี 7 อันตรภาคชั้น พร้อมทั้งแสดงความถี่สัมพัทธ์ ความถี่สะสมสัมพัทธ์ และจุดกึ่งกลางชั้นของแต่ละอันตรภาคชั้น

วิธีทำ จากข้อมูล ค่าสูงสุด ($X_{\max}$) = 48 ค่าต่ำสุด ($X_{\min}$) = 8

ขั้นที่ 1 พิสัย = $X_{\max} - X_{\min} = 48 - 8 = 40$

ขั้นที่ 2 ความกว้างของอันตรภาคชั้น = $\frac{\text{พิสัย}}{\text{จำนวนชั้น}} = \frac{40}{7} = 5.71 \approx 6$

ขั้นที่ 3-5 เขียนอันตรภาคชั้นลงในตาราง พร้อมทั้งนับจำนวนข้อมูลและจำนวนรอยขีด เพื่อแสดงความถี่

คะแนน	รายนับ	ความถี่ (f)
8 - 13	IIII	4
14 - 19	HH II	7
20 - 25	HH	5
26 - 31	HH I	6
32 - 37	III	3
38 - 43	III	3
44 - 49	II	2
จำนวนข้อมูลรวม		30

ชั้นที่ 6 แสดงข้อมูลที่โจทย์ต้องการ

คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม	ความถี่สัมพัทธ์	ความถี่สะสมสัมพัทธ์	จุดกึ่งกลางชั้น
8 - 13	4	4	$\frac{4}{30} = 0.13$	0.13	10.5
14 - 19	7	11	$\frac{7}{30} = 0.23$	0.36	16.5
20 - 25	5	16	$\frac{5}{30} = 0.17$	0.53	22.5
26 - 31	6	22	$\frac{6}{30} = 0.2$	0.73	28.5
32 - 37	3	25	$\frac{3}{30} = 0.1$	0.83	34.5
38 - 43	3	28	$\frac{3}{30} = 0.1$	0.93	40.5
44 - 49	2	30	$\frac{2}{30} = 0.07$	1.00	46.5

แบบฝึกหัด 3.2

จากตารางแจกแจงความถี่ข้อมูลของผลสอบกลางภาควิชาคณิตศาสตร์ คะแนนเต็ม 50 คะแนน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3/4 จำนวน 40 คน ของโรงเรียนแห่งหนึ่งเป็นดังตาราง

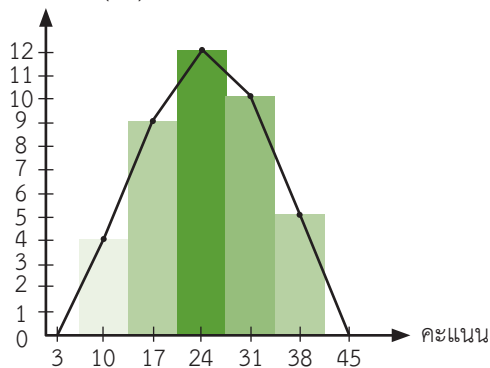
คะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)
7 - 13	4
14 - 20	9
21 - 27	12
28 - 34	10
35 - 41	5

จงแสดงฮิสโทแกรมของข้อมูลที่กำหนดให้ พร้อมวาดรูปหลายเหลี่ยมของความถี่

วิธีทำ หาขอบล่าง ขอบบน และจุดกึ่งกลางแล้วนำไปวาดฮิสโทแกรม

คะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)	ขอบล่าง	ขอบบน	จุดกึ่งกลาง
7 - 13	4	6.5	13.5	10
14 - 20	9	13.5	20.5	17
21 - 27	12	20.5	27.5	24
28 - 34	10	27.5	34.5	31
35 - 41	5	34.5	41.5	38

จำนวนนักเรียน (คน)



แบบฝึกหัด 3.3

ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย 8, 11, 9, 6, 12 และ 14 จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้
วิธีทำ เป็นข้อมูลไม่แจกแจงความถี่ได้จากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} = \frac{8 + 11 + 9 + 6 + 12 + 14}{6}$$

$$\bar{X} = \frac{60}{6} = 10$$

ตอบ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลเท่ากับ 10

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1) จากตารางแจกแจงความถี่ต่อไปนี้ จงหาค่ามัธยฐาน

วิธีทำ จะหามัธยฐานได้ ต้องหาความถี่สะสมก่อนดังตาราง

อันตรภาคชั้น	ความถี่	ความถี่สะสม
11 - 20	10	10
21 - 30	5	15 (F)
31 - 40	5	20
41 - 50	25 (f)	45 ←
51 - 60	15	60
		N = 60

ตำแหน่งของมัธยฐาน

$$\frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

หาค่าของมัธยฐาน

$$Md = L_0 + \frac{\left(\frac{N}{2} - F\right)}{f}$$

$$= 40.5 + 10 \frac{\left(\frac{60}{2} - 20\right)}{25}$$

$$= 40.5 + 4$$

$$= 44.5$$

ตอบ มัธยฐานเท่ากับ 44.5

2) จงหามัธยฐานของข้อมูลต่อไปนี้ 3, 2, 4, 6, 7, 9, 5, 8, 8, 2, 4

วิธีทำ เรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปมากได้ 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9

$$\text{ตำแหน่งของ } Md = \frac{N+1}{2} = \frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

นับตำแหน่งข้อมูลเพื่ออ่านค่าข้อมูลที่อยู่ในลำดับที่ 6: 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9

$$\therefore Md = 5$$

ตอบ มัธยฐานของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 5

3) น้ำหนักของคน 8 คนคือ 55, 45, 42, 57, 62, 60, 45 และ 53 จงหามัธยฐานของน้ำหนักเหล่านี้

วิธีทำ เรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปมากได้ 42, 45, 45, 53, 55, 57, 60, 62

$$\text{ตำแหน่ง } Md = \frac{N+1}{2} = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

นับตำแหน่งข้อมูลเพื่ออ่านค่าข้อมูลที่อยู่ในลำดับที่ 4.5: 42, 45, 45, 53, 55, 57, 60, 62

$$\therefore Md = \frac{53+55}{2} = \frac{108}{2} = 54$$

ตอบ มัธยฐานของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 54

4) คะแนนสอบภาคปฏิบัติวิชาพลศึกษาคะแนนเต็ม 100 คะแนนของนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 15 คนเป็นดังนี้ 9, 8, 4, 5, 6, 9, 8, 7, 3, 4, 5, 6, 8, 5 และ 7 จงหาฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้

วิธีทำ จำนวนข้อมูลที่ซ้ำกันมากที่สุดคือ 9, 8, 4, 5, 6, 9, 8, 7, 3, 4, 5, 6, 8, 5 และ 7

$$\therefore Mo = 8$$

ตอบ ฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 8

5) ผลการตรวจความพึงพอใจการบริการของพนักงานประจำสถาบันเสริมความงามแห่งหนึ่งพบว่า ลูกค้ำที่ร่วมทำแบบสอบถามทั้งหมด 20 คน ให้คะแนนความพึงพอใจพนักงานจากระดับ 1 (น้อยที่สุด) - ระดับ 5 (มากที่สุด) เป็นดังนี้ 4, 3, 3, 2, 5, 4, 5, 5, 4, 5, 3, 2, 2, 4, 3, 4, 5, 2, 3 และ 2 จงหาฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้

วิธีทำ นับจำนวนข้อมูลที่ซ้ำกันมากที่สุด ปรากฏว่าข้อมูลทุกค่ามีค่าซ้ำกันคือซ้ำกัน 5 ครั้ง

$\therefore$ ข้อมูลชุดนี้ไม่มีฐานนิยมเพราะข้อมูลแต่ละตัวมีความถี่เท่ากันหมด

ตอบ ไม่มีฐานนิยม

6) จากการสำรวจน้ำหนักของนักเรียน 4 คน ฐานนิยมเป็น 40 กิโลกรัม มัธยฐานเป็น 39 กิโลกรัม พิสัยเท่ากับ 6 กิโลกรัม มีนักเรียน 2 คนที่มีน้ำหนักน้อยกว่าฐานนิยม ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับเท่าไร

วิธีทำ มีข้อมูลทั้งหมด 4 จำนวน คือ a, b, c, d

โจทย์บอกว่า $Mo = 40$ $\therefore$ ต้องมีข้อมูลค่าเท่ากับ 40 อย่างน้อย 2 ค่า a, b, 40, 40

โจทย์บอกว่า $Md = 39$ จากตำแหน่ง $Md = \frac{N+1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

$\therefore$ ตำแหน่ง Md ที่ 2.5 คือ a, b, 40, 40

$$\therefore Md = 39 = \frac{b + 40}{2}$$

$$b = (39 \times 2) - 40$$

$$b = 38$$

โจทย์กำหนด พิสัย = 6 จาก พิสัย = $X_{\max} - X_{\min}$

$$6 = 40 - a \quad \therefore a = 34$$

$\therefore$ ข้อมูลทั้งหมดคือ 34, 38, 40, 40

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{34 + 38 + 40 + 40}{4} = \frac{152}{4} = 38$$

ตอบ ค่าเฉลี่ยของน้ำหนักนักเรียน 4 คนเท่ากับ 38 กิโลกรัม

7) ในการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียน 50 คน ได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 20 ปรากฏว่าอาจารย์คิดคะแนนผิดไป 2 คน โดยคนแรกอ่านจาก 10 เป็น 17 และคนสุดท้ายอ่าน 14 เป็น 12 คะแนน จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่ถูกต้อง

วิธีทำ โจทย์บอก $\bar{X}$ มาให้ ทำให้หา $\sum x_{\text{เดิม}}$ ได้

$$\text{จาก } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \text{ ดังนั้น } \sum x = \bar{X}N$$

$$\text{จาก } \sum x_{\text{เดิม}} = \bar{X}_{\text{เดิม}}N = 20 \times 50 = 1,000$$

โจทย์บอกว่าอ่านข้อมูลผิดไป 2 ค่า คือจาก 10 เป็น 17 และ 14 เป็น 12
ดังนั้น ข้อมูลที่ถูกจะต้องลบออกด้วยค่าที่นำไปคิดผิดคือ 17 และ 12 หลังจากนั้นต้องบวกด้วย
10 และ 14

$$\therefore \Sigma x_{\text{ใหม่}} = \Sigma x_{\text{เดิม}} - 17 - 12 + 10 + 14$$

$$\Sigma x_{\text{ใหม่}} = 1,000 - 17 - 12 + 10 + 14 = 995$$

$$\text{จาก } \bar{X}_{\text{ใหม่}} = \frac{\Sigma x_{\text{ใหม่}}}{N} = \frac{995}{50} = 19.9$$

ตอบ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่ถูกต้องคือ 19.9

8) จากข้อมูลเรียงลำดับจากน้อยไปมาก 2, 4, 4, 5, 5, m, 8, 8, และ 10 ข้อมูลชุดนี้
มีมัธยฐานน้อยกว่าฐานนิยม จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้

วิธีทำ เป็นข้อมูลไม่แจกแจงความถี่ที่เรียงจากน้อยไปมากมาแล้ว

สามารถหา Md ได้ก่อนอันดับแรก

เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก: 2, 4, 4, 5, 5, m, 8, 8, 10

$$\text{ตำแหน่ง } Md = \frac{N+1}{2} = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

นับตำแหน่งข้อมูลเพื่ออ่านค่าข้อมูลที่อยู่ในลำดับที่ 5: 2, 4, 4, 5, 5, m, 8, 8, 10

$$\therefore Md = 5$$

จากข้อมูลโจทย์บอกว่ามี Mo

ข้อมูลตอนนี้ที่ค่าซ้ำกัน 2 ชุด มีแนวโน้มเป็น Mo ได้คือ 4, 5 และ 8

แต่โจทย์ระบุว่า $Md < Mo$ โดยเราทราบแล้วว่า $Md = 5$

ดังนั้น $Mo = 8$ หมายถึง ค่า $m = 8$ นั่นเอง

เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก: 2, 4, 4, 5, 5, 8, 8, 8, 10

$$\text{จาก } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{2+4+4+5+5+8+8+8+10}{9} = \frac{54}{9} = 6$$

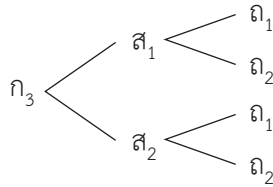
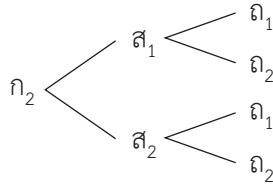
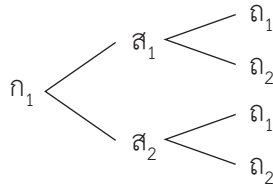
ตอบ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 6

เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 4

แบบฝึกหัด 4.1

นักเรียนคนหนึ่งมีกางเกง 3 ตัว เสื้อ 2 ตัว และถุงเท้า 2 คู่ นักเรียนคนนี้จะแต่งกายด้วยกางเกง เสื้อ และถุงเท้าได้กี่วิธี

วิธีทำ ก หมายถึง กางเกง, ส หมายถึง เสื้อ, ถ หมายถึง ถุงเท้า



ตอบ นักเรียนคนนั้นแต่งกายได้ 12 วิธี

แบบฝึกหัด 4.2

1) น้องขวัญมีเสื้อ 4 ตัวและกางเกง 3 ตัวที่มีสีแตกต่างกัน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่น้องขวัญจะสวมเสื้อและกางเกงเป็นชุดต่าง ๆ กันได้ทั้งหมดกี่ชุด

วิธีทำ เป็นเหตุการณ์ที่ต่อเนื่องกันเพราะเสื้อกับกางเกงต้องใส่เป็นชุดเดียวกันจึงต้องใช้กฎการคูณ

มีเสื้อ 4 ตัว ขั้นตอนย่อยที่ 1 มี 4 วิธี

มีกางเกง 3 ตัว ขั้นตอนย่อยที่ 2 มี 3 วิธี

วิธีทำงานทั้งหมด = $4 \times 3 = 12$ วิธี

ตอบ น้องขวัญแต่งกายได้ 12 วิธี

2) สร้างจำนวนสองหลักจากเลขโดด 1, 2, 3 โดยไม่ใช้ตัวเลขซ้ำกัน จะสร้างได้กี่จำนวน

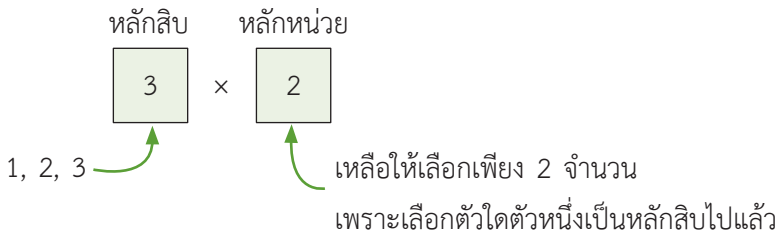
วิธีทำ เนื่องจากจำนวนสองหลักต้องประกอบด้วยหลักสิบและหลักหน่วย จึงต้องใช้กฎการคูณ

หลักสิบ เลือกได้ 3 จำนวน คือ 1, 2, 3 ขั้นตอนย่อยที่ 1 มี 3 วิธี

หลักหน่วย เลือกได้ 2 จำนวน เพราะตอนแรกมี 3 จำนวน แต่ใช้ไปแล้ว 1 จำนวน (ห้ามซ้ำ)

ขั้นตอนย่อยที่ 2 จึงมี 2 วิธี

วิธีทำงานทั้งหมด = $3 \times 2 = 6$ วิธี



ได้แก่ จำนวนต่อไปนี้ → 12, 13, 21, 23, 31, 32

ตอบ ได้จำนวนสองหลักที่แตกต่างกัน 6 จำนวน

แบบฝึกหัด 4.3

1) นายคณิตต้องเดินทางจากเมือง A ไปเมือง C โดยมีถนนจากเมือง A ไปเมือง B อยู่ 3 เส้นทาง จากเมือง B ไปเมือง C อยู่ 2 เส้นทาง นอกจากนั้นยังมีถนนจากเมือง A ไปเมือง C ได้โดยตรงซึ่งไม่ต้องผ่านเมือง B อยู่ 5 เส้นทาง จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่คณิตจะเดินทางจากเมือง A ไป เมือง C ได้

วิธีทำ การคิดวิธีเดินทางทั้งหมดต้องแบ่งออกเป็น 2 รูปแบบ

รูปแบบที่ 1 เดินทางจากเมือง A $\xrightarrow{3}$ เมือง B $\xrightarrow{2}$ เมือง C $\therefore$ วิธีนี้ใช้กฎการคูณ
ขั้นที่ 1 เมือง A $\rightarrow$ เมือง B โจทย์กำหนดมี 3 เส้นทาง $\therefore$ ขั้นตอนย่อยที่ 1 มี 3 วิธี
ขั้นที่ 2 เมือง B $\rightarrow$ เมือง C โจทย์กำหนดมี 2 เส้นทาง $\therefore$ ขั้นตอนย่อยที่ 2 มี 2 วิธี
วิธีทำงานในรูปแบบที่ 1 $= 3 \times 2 = 6$ วิธี

รูปแบบที่ 2 เดินทางจากเมือง A $\xrightarrow{5}$ เมือง C โดยตรง โดยบอกจำนวนวิธีมาแล้วคือ 5 วิธี

การหาวิธีเดินทางทั้งหมดต้องใช้กฎการบวก เพราะแต่ละวิธีงานเสร็จในตัวเอง แยกกันเด็ดขาด
 $\therefore$ จำนวนวิธีเดินทางทั้งหมดคือ รูปแบบที่ 1 + รูปแบบที่ 2 $= 6 + 5 = 11$ วิธี

ตอบ จำนวนวิธีทั้งหมดที่คณิตจะเดินทางได้จากเมือง A ไปเมือง C คือ 11 วิธี

2) จงสร้างจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่า 100 ที่ประกอบด้วยตัวเลขโดด 0, 1, 2 และ 3 โดยที่ไม่ใช้ตัวเลขซ้ำจะสร้างได้กี่จำนวน

วิธีทำ ต้องแยกคิดรูปแบบจำนวนแต่ละแบบแล้วนำมารวมกันตามกฎการบวก โดยค่าสูงสุดคือจำนวนสองหลัก

รูปแบบที่ 1 จำนวนหลักเดียวเป็น 0 ไม่ได้ เพราะ 0 ไม่ใช่จำนวนเต็มบวก

หลักหน่วยเลือกได้ 3 จำนวนคือ 1, 2, 3

∴ รูปแบบที่ 1 มี 3 วิธี ได้แก่ 1, 2, 3

รูปแบบที่ 2 จำนวนสองหลัก

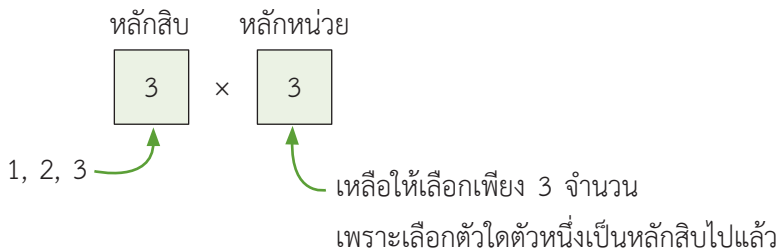
หลักสิบเลือกได้ 3 จำนวนคือ 1, 2, 3 (เป็น 0 ไม่ได้) ∴ ขั้นตอนย่อยที่ 1 มี 3 วิธี

หลักหน่วยเลือกได้ 3 จำนวน เพราะตอนแรกมี 4 จำนวน แต่ใช้ไปแล้ว 1 จำนวน (ห้ามซ้ำ)

∴ ขั้นตอนย่อยที่ 2 มี 3 วิธี

วิธีทำงานทั้งหมด = $3 \times 3 = 9$ วิธี

∴ รูปแบบที่ 2 มี 9 วิธี



ได้แก่ จำนวนต่อไปนี้ → 10, 12, 13, 20, 21, 23, 30, 31, 32

∴ สร้างจำนวนเต็มบวกได้ทั้งหมดคือรูปแบบที่ 1 + รูปแบบที่ 2 = $3 + 9 = 12$ วิธี

ตอบ สร้างจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่า 100 จากเลขโดด 0, 1, 2 และ 3 โดยไม่ซ้ำกันได้ทั้งหมด 12 จำนวน

แบบฝึกหัด 4.4

1) จงหาค่าของ $\frac{11!}{9!}$

วิธีทำ ต้องทำให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ โดยทำให้ตัวเศษและตัวส่วนมีผลคูณที่เป็นตัวเดียวกัน แล้วจึงตัดค่านั้นออก

$$\frac{11!}{9!} = \frac{11 \times 10 \times \cancel{9!}}{\cancel{9!}} = 11 \times 10 = 110$$

ตอบ 110

2) จงหาค่าของ n จากสมการ $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 1,640$

วิธีทำ จะหาค่าได้ต้องทำให้ส่วนที่เป็นแฟกทอเรียลหมดไปก่อน

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 1,640$$

$$\frac{(n+1) \times n \times \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 1,640$$

$$(n+1) \times n = 1,640$$

$$(n+1) \times n = 41 \times 40$$

$$(n+1) \times n = (40+1) \times 40$$

ตอบ $\therefore n = 40$

แบบฝึกหัด 4.5

มีนักเรียน 6 คน ต้องการจัดเรียงแถวเป็นเส้นตรงจะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ จาก n สิ่ง จัดเรียงแนวเส้นตรงได้ n! วิธี

นักเรียน 6 คน จัดเรียงได้ $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ วิธี

ตอบ นักเรียน 6 คนจัดเรียงแถวเป็นเส้นตรงได้ทั้งหมด 720 วิธี

แบบฝึกหัด 4.6

มีนักเรียนชาย 3 คนและหญิง 3 คน ต้องการจัดเรียงแถวเป็นวงกลม โดยมีเงื่อนไขว่าผู้หญิงทั้ง 3 คน ต้องยืนติดกันเสมอ จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ จาก n สิ่ง จัดเรียงแนววงกลมได้ $(n-1)!$ วิธี

นักเรียน 6 คน จัดเรียงได้ $(6-1)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ วิธี

ตอบ นักเรียน 6 คน จัดเรียงแถวเป็นวงกลมได้ทั้งหมด 120 วิธี

แบบฝึกหัด 4.7

นำลูกปัดที่มีสีแตกต่างกันจำนวน 6 ลูกมาร้อยเป็นพวง จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ จาก n สิ่ง จัดเรียงแนววงกลมพลิกได้ $\frac{(n-1)!}{2}$ วิธี

ลูกปัด 6 ลูก ร้อยเป็นพวงได้ $\frac{(6-1)!}{2} = \frac{5!}{2} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{2} = 60$ วิธี

ตอบ นำลูกปัดที่มีสีแตกต่างกันจำนวน 6 ลูกมาร้อยเป็นพวงได้ทั้งหมด 60 วิธี

แบบฝึกหัด 4.8

มีนักเรียนชาย 3 คนและหญิง 3 คน ต้องการจัดเรียงแถวเป็นเส้นตรง โดยมีเงื่อนไขว่าผู้หญิงทั้ง 3 คน ต้องยืนติดกันเสมอ จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ ให้คิดในใจว่ามัดผู้หญิง 3 คนเป็นก้อนเดียวกันเพราะต้องยืนติดกันเสมอ



$\therefore n = 4$ เรียงเป็นเส้นตรงได้ $4!$

** แต่ยังไม่ใช่คำตอบ **

ในก้อนผู้หญิงที่มัดไว้ด้วยกันยังสลับตำแหน่งกันได้ มีทั้งหมด 3 คน

$\therefore$ สลับกันได้แนวเส้นตรงคือ $3!$ ใช้กฎการคูณเพราะขั้นตอนต่อเนื่องกัน

$\therefore$ วิธีทั้งหมด $= 3! \times 4! = 144$ วิธี

ตอบ 144 วิธี

แบบฝึกหัด 4.9

มีนักเรียนชาย 3 คนและหญิง 3 คน ต้องการจัดเรียงแถวเป็นเส้นตรง โดยมีเงื่อนไขว่าผู้หญิงทั้ง 3 คน ต้องยืนแยกกันเสมอ จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ จัดตำแหน่งให้ผู้หญิง: คนที่ 1 เลือกลงได้ 4 ตำแหน่งที่ว่าง

คนที่ 2 เลือกลงได้ 3 ตำแหน่งที่ว่าง

คนที่ 3 เลือกลงได้ 2 ตำแหน่งที่ว่าง

$$\therefore \text{ผู้หญิงสลับที่กันได้} = 4 \times 3 \times 2 = 4!$$

การนับจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนรวมทั้งหมดต้องใช้กฎการคูณเพราะขั้นตอนต่อเนื่องกัน

$$\therefore \text{วิธีทั้งหมด} = \text{วิธีสลับที่ผู้ชาย} \times \text{วิธีสลับที่ผู้หญิง}$$

$$= 3! \times 4!$$

$$= 144 \text{ วิธี}$$

ตอบ ทำได้ 144 วิธี

แบบฝึกหัด 4.10

กำหนดตัวอักษร ABBBB จงหาว่านำตัวอักษรมาเรียงสับเปลี่ยนตำแหน่งกันได้ทั้งหมดที่วิธี

วิธีทำ มีตัวอักษรทั้งหมด 4 ตัว แต่มีตัว B ซ้ำ ทั้งหมด 3 ตัว

$$\text{จำนวนวิธี} = \frac{\text{จำนวนทั้งหมด!}}{\text{ตัวซ้ำ!}} = \frac{4!}{3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4 \text{ วิธี}$$

ตอบ 4 วิธี

แบบฝึกหัด 4.11

1) มีตัวอักษร 5 ตัว คือ A, B, C, D และ E นำมาจัดเรียง 2 ตัว จะทำได้กี่วิธี

วิธีทำ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนแนวเส้นตรงจาก n สิ่ง คราวละ r สิ่ง ใช้สูตร $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

ตัวอักษรทั้งหมด 5 ตัว คือ $n=5$ และนำมาจัดเรียงคราวละ 2 ตัว คือ $r=2$

$$P_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20 \text{ วิธี}$$

พิสูจน์โดยการเรียงตัวอักษร 2 ตัว จากตัวอักษรทั้งหมด 5 ตัว ได้ดังนี้

AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED

ตอบ 20 วิธี

2) จงหาค่า n จากสมการต่อไปนี้ $P_{n,5} = 20P_{n,4}$

วิธีทำ ใช้สูตร $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$P_{n,5} = 20P_{n,4}$$

$$\frac{n!}{(n-5)!} = 20 \times \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\frac{n!}{(n-5)!} \times \frac{(n-4)!}{n!} = 20$$

$$\frac{n!}{(n-5)!} \times \frac{(n-4) \times (n-5)!}{n!} = 20$$

$$n-4 = 20$$

$$\therefore n = 24$$

ตอบ $n = 24$

แบบฝึกหัด 4.12

มีผู้สมัครเข้าร่วมเป็นกรรมการหมู่บ้านจัดสรรแห่งหนึ่งทั้งหมด 9 คน แต่กรรมการชุดหนึ่งจะมีได้เพียง 5 คนเท่านั้น จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกกรรมการทั้งหมดที่เป็นไปได้

วิธีทำ เป็นการเลือกจาก n สิ่ง คราวละ r สิ่ง ใช้สูตร $C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

ผู้สมัครชิงตำแหน่งกรรมการทั้งหมด 9 คน คือ $n = 9$

แต่เลือกเป็นกรรมการได้ 5 คน คือ $r = 5$

$$C_{n,r} = \frac{9!}{(9-5)!5!} = \frac{9!}{4!5!} = 126 \text{ วิธี}$$

ตอบ 126 วิธี

แบบฝึกหัด 4.13

โยนลูกเต๋า 2 ลูกที่มีสีแตกต่างกันพร้อม ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าดูออกแต้ม 3

วิธีทำ โยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน สนใจแต้มของลูกเต๋าทันที 2 ลูกที่เกิดขึ้น $\therefore n(S) = 36$

นับเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าดูออกแต้ม 3 จากตารางที่แสดงสมาชิกทั้งหมดของแซมเปิลสเปซ

ลูก 2 \ ลูก 1						
	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

$$\therefore n(E) = 11$$

ตอบ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{11}{36} = 0.306$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1) กล่องใบหนึ่งมีบัตรคำภาษาอังกฤษอยู่ 5 แผ่น ได้แก่ car, run, notebook, telephone และ sing ถ้าให้นักเรียนสุ่มหยิบบัตรคำขึ้นมา 1 แผ่น อยากทราบว่าบัตรคำที่หยิบได้จะเป็นคำชนิดใดมากกว่ากันระหว่างคำนามกับคำกริยา

1.1 บัตรคำที่เป็นคำนาม ได้แก่ car, notebook, telephone

1.2 โอกาสที่จะหยิบบัตรคำนาม เท่ากับ $\frac{3}{5}$

1.3 บัตรคำที่เป็นคำกริยา ได้แก่ run, sing

1.4 โอกาสที่จะหยิบบัตรคำกริยา เท่ากับ $\frac{2}{5}$

1.5 บัตรคำที่หยิบได้จะเป็นคำชนิดใดมากกว่ากันระหว่าง คำนาม กับ คำกริยา คำนาม

2) จงเขียนเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่เป็นการทดลองสุ่ม และเขียนเครื่องหมาย ✕ หน้าข้อความที่ไม่ใช่การทดลองสุ่ม

✓ 1) การหยิบไฟ 1 ใบ จากไฟหนึ่งสาร์บ

✕ 2) การคัดส้มโอทับทิมสยามที่มีตำหนิออกจากกองส้มโอ 50 ผล

✕ 3) คอกสุนัขหนึ่งมีลูกสุนัข 4 ตัว สายฟ้าเลือกจับลูกสุนัขที่ตัวเองชอบขึ้นมา 1 ตัว

✓ 4) การทดลองทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

✕ 5) การสอบคัดเลือกนักเรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์จากนักเรียนทั่วประเทศ

✕ 6) การหาผลคูณของสองจำนวน

✓ 7) การหยิบลูกแก้ว 1 ลูก จากกล่องทึบแสงที่มีลูกแก้วสีแดง 2 ลูก และสีขาว 3 ลูก

✓ 8) การหมุนวงล้อออกรางวัลเลขท้าย 2 ตัว ในงานกาชาดประจำปี

✓ 9) การจับสลากเข้าเรียนต่อในโรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้

✓ 10) การปาลูกดอก 1 ครั้ง บนเป้าที่มีแต้ม 3, 5, 7 และ 9

✕ 11) การทำข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์

3) เลือกอักษรจากคำว่า sandwich ขึ้นมา 1 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่ตัวอักษรนั้นจะเป็น

3.1) สระ

แซมเปิลสเปซหรือผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้น คือ s, a, n, d, w, i, c และ h จะได้ $n(S)=8$
เหตุการณ์ที่จะได้อักษรเป็นสระ คือ a และ i จะได้ $n(E)=2$

ตอบ ดังนั้น $P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

3.2) พยัญชนะ

แซมเปิลสเปซหรือผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้น คือ s, a, n, d, w, i, c และ h จะได้ $n(S)=8$
เหตุการณ์ที่จะได้อักษรเป็นพยัญชนะ คือ s, n, d, w, c, h จะได้ $n(E)=6$

ตอบ ดังนั้น $P(E) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

4) ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์แบบเลือกตอบ 20 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน ผู้ที่สอบผ่านต้องได้คะแนนตั้งแต่ 60% ขึ้นไป จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะสอบไม่ผ่าน

วิธีทำ S คือ 0, 1, 2, 3, 4, ..., 19, 20 นั่นคือ $n(S)=21$

ผู้สอบผ่านต้องได้คะแนนตั้งแต่ 60% ขึ้นไป คิดเป็น $\frac{60}{100} \times 20 = 12$ คะแนน

E คือ 0, 1, 2, 3, 4, ..., 10, 11 นั่นคือ $n(E)=12$

จาก $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ จะได้ $P(E) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

ตอบ ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะสอบไม่ผ่านเท่ากับ $\frac{4}{7}$

5) บริษัทประกันภัยรถยนต์แห่งหนึ่ง พบว่าจากสถิติที่ผ่านมาผู้ประกันภัยรถยนต์เพียง 15% ที่จะประสบอุบัติเหตุ และแต่ละครั้งบริษัทจะจ่ายค่าประกันประมาณ 20,000 บาท ถ้าบริษัทประกันภัยคิดค่าประกันเพียง 1,000 บาท ต่อการทำประกันภัยหนึ่งราย

5.1) ความน่าจะเป็นของผู้ประกันภัยรถยนต์จะเกิดอุบัติเหตุเป็นเท่าใด

ตอบ เนื่องจากมีผู้ประกันภัยรถยนต์เพียง 15% ที่จะประสบอุบัติเหตุ

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของผู้ประกันภัยรถยนต์จะเกิดอุบัติเหตุ เท่ากับ $\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$

5.2) ความน่าจะเป็นของผู้ประกันภัยรถยนต์จะไม่เกิดอุบัติเหตุเป็นเท่าใด

ตอบ ความน่าจะเป็นของผู้ประกันภัยรถยนต์จะเกิดอุบัติเหตุ เท่ากับ $\frac{85}{100} = \frac{17}{20}$

5.3) จงหาค่าคาดหวังว่าบริษัทประกันภัยมีโอกาสได้กำไรหรือขาดทุน

ตอบ ค่าคาดหวัง = (ผลตอบแทนที่ได้ $\times$ ความน่าจะเป็นที่ผู้ทำประกันภัยไม่เกิดอุบัติเหตุ) +

(ผลตอบแทนที่เสีย $\times$ ความน่าจะเป็นผู้ทำประกันภัยเกิดอุบัติเหตุ)

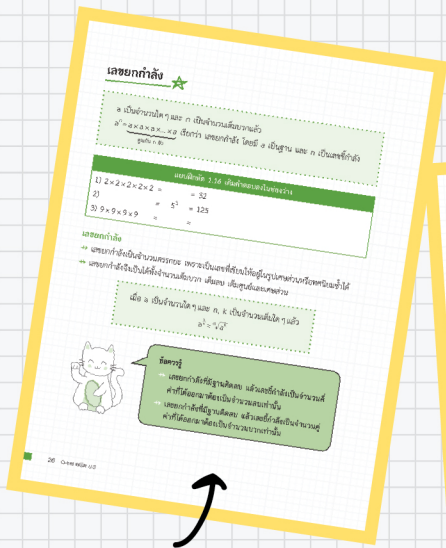
$$= \left(1,000 \times \frac{85}{100}\right) + \left((-20,000) \times \frac{15}{100}\right)$$

$$= 850 - 3,000$$

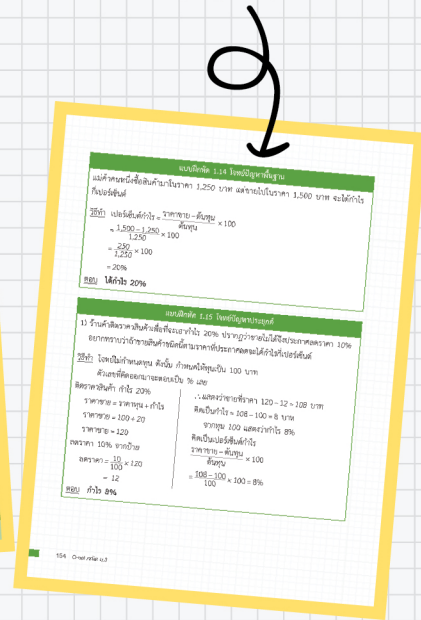
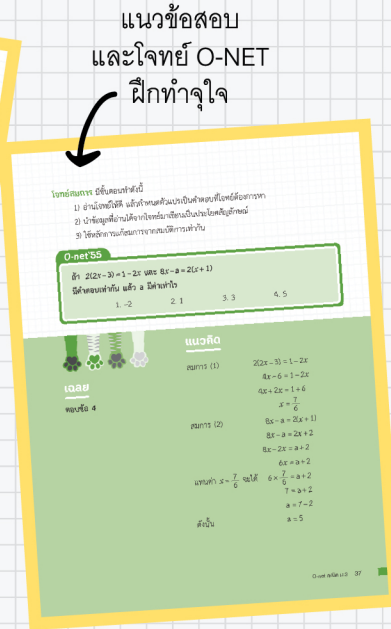
$$= -2,150$$

แสดงว่า บริษัทประกันภัยขาดทุน

เฉลยคำตอบ
พร้อมวิธีคิดละเอียด
แบบ step by step



สรุปเนื้อหา
ที่นิยมออกสอบ

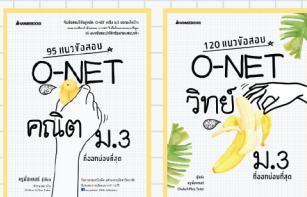


เตรียมตัวสอบ O-NET คณิต แต่อ่านและท่องจำสูตรไม่พอ ต้องฝึกทำแบบฝึกหัดและแนวข้อสอบด้วย

ปูพื้นความรู้ ปิดจุดอ่อน เพิ่มจุดแข็งด้วยคู่มือเตรียมสอบที่เนื้อหาครบจบในเล่มเดียว

- สรุปเนื้อหาสำคัญและจุดที่ควรจำของทุกเรื่องที่จะออกสอบเพื่ออ่านทบทวน
- 95 แนวข้อสอบ (พิเศษ 20 โจทย์ O-NET) ให้ฝึกทำ
พร้อมเฉลยวิธีคิดเป็นขั้นตอน เข้าใจง่าย
- บอกเฉลยละเอียดทั้งข้อถูกและข้อผิด

ทั้งคู่มี 2 เล่ม



www.nanmeebooks.com
หมวดคู่มือเรียน-เตรียมสอบ/คณิตศาสตร์
ราคา 165 บาท